

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapă Locală Dâmbovița**  
**17-02-2019**  
**Clasa a XI-a**

**Barem de corectare**

**Subiectul 1.** Se consideră matricea  $A \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Arătați că există  $\lambda \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $\lambda \cdot (I_2 + A)(I_2 - A) = I_2$  și calculați suma  $S = I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2019}$ .

**Soluție.**

$$\lambda = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 3p$$

$$A^{4k} = I_2, A^{4k+1} = A, A^{4k+2} = -I_2, A^{4k+3} = -A \dots\dots\dots 2p$$

$$S = O_2 \dots\dots\dots 2p$$

**Subiectul 2.** Pentru o matrice  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ , notăm cu  $Tr(X) = a + d$  și

$$\det X = ad - bc.$$

**a)** Arătați că  $\det(A + xB) = \det A + (Tr(A) \cdot Tr(B) - Tr(AB))x + \det B \cdot x^2$ , oricare ar fi matricele  $A, B \in M_2(\mathbb{C})$  și numărul complex  $x$ ;

**b)** Demonstrați că  $AB + BA = Tr(A) \cdot B + Tr(B) \cdot A + (Tr(AB) - Tr(A) \cdot Tr(B)) \cdot I_2$ , oricare ar fi matricele  $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ ;

**c)** Dacă  $A, B \in M_2(\mathbb{C})$  sunt două matrice nenule și  $AB + BA = O_2$ , arătați că

$$Tr(A) = Tr(B) = 0 \text{ sau } \det A = \det B = 0.$$

Florin Stănescu, G.M.B

**Soluție.**

**a)** Demonstrează cerința.....1p

**b)** Demonstrează cerința.....1p

**c)**  $\det(A + B)^2 = \det(A - B)^2$  .....1p

$$(Tr(A) \cdot Tr(B) - Tr(AB))(\det A + \det B) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\det(A + iB)^2 = \det(A - iB)^2 \Rightarrow (Tr(A) \cdot Tr(B) - Tr(AB))(\det A - \det B) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dacă } Tr(AB) = Tr(A) \cdot Tr(B) \Rightarrow Tr(A) = Tr(B) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dacă } Tr(AB) \neq Tr(A) \cdot Tr(B) \Rightarrow \det A = \det B = 0 \dots\dots\dots 1p$$

**Subiectul 3.** Considerăm şirul de numere reale  $(a_n)_{n \geq 1}$  astfel încât  $a_1 = 2$  şi

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}), n \geq 2. \text{ Notăm cu } s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, n \geq 1.$$

$$\text{a) Arătaţi că } s_n = \frac{2n}{n-1} \cdot s_{n-1}, n \geq 2; \quad \text{b) Calculaţi: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^1}{1 \cdot a_1} + \frac{2^2}{2 \cdot a_2} + \frac{2^3}{3 \cdot a_3} + \dots + \frac{2^n}{n \cdot a_n} \right);$$

**Soluţie.**

$$\text{a) } s_n = a_n + s_{n-1} = \frac{n+1}{n-1} s_{n-1} + s_{n-1} = \frac{2n}{n-1} s_{n-1}, n \geq 2 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{b) } s_n = s_1 \cdot \prod_{k=2}^n \frac{2k}{k-1} = 2 \cdot 2^{n-1} \cdot n = 2^n \cdot n \dots\dots\dots 2p$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} = 2^{n-1}(n+1), n \geq 2 \dots\dots\dots 2p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k \cdot a_k} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 2 \dots\dots\dots 1p$$

**Subiectul 4.** Se consideră şirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu termeni strict pozitivi. Ştiind că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) =$

$$\gamma \in (0, \infty), \text{ arătaţi că: a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = e.$$

G.M.B

**Soluţie.**

$$\text{a) Există } \alpha > 0, m \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } a_{n+1} - a_n > \alpha, (\forall) n \geq m \dots\dots\dots 1p$$

$$a_n \geq a_m + (n-m)\alpha, (\forall) n \geq m \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Pentru } n \geq m, \text{ avem } \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \gamma \text{ (Stolz-Cesaro)} \dots\dots\dots 1p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}} \right]^{(a_{n+1} - a_n) \frac{n}{a_n}} = e^{\gamma \frac{1}{\gamma}} = e \dots\dots\dots 2p$$