

Barem – Clasa a X-a

Subiectul I

Se consideră numerele a, b, c, d astfel încât $a > c > b > 0$ și $ab = cd$.

Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $a^x + b^x \geq c^x + d^x$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} a^x + b^x - c^x - \left(\frac{ab}{c}\right)^x &\geq 0 \dots\dots\dots \mathbf{1\ p} \\ c^x \left[\left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x - 1 - \left(\frac{a \cdot b}{c \cdot c}\right)^x \right] &\geq 0 \dots\dots\dots \mathbf{1\ p} \\ \left(\left(\frac{a}{c}\right)^x - 1\right) \left(1 - \left(\frac{b}{c}\right)^x\right) &\geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^x - 1 \text{ și } 1 - \left(\frac{b}{c}\right)^x \text{ au același semn} \dots\dots\dots \mathbf{3\ p} \\ \text{Cum } \frac{a}{c} > 1 \text{ și } \frac{b}{c} < 1 \text{ se consideră cazurile } x \geq 0 \text{ și } x < 0 \text{ iar problema este rezolvată} \dots\dots\dots \mathbf{2p} \end{aligned}$$

Subiectul II

Să se arate că nu există funcții injective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care pentru orice număr real x , satisfac relația:

$$f(3^x) + f(5^x) = 8.$$

Gazeta Matematică

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{Presupunem că există o astfel de funcție injectivă} \dots\dots\dots \mathbf{(1p)} \\ \text{Pentru } x = 1 \text{ obținem: } f(3) + f(5) = 8 \dots\dots\dots \mathbf{(1p)} \\ \text{Pentru } x = \log_3 5 \text{ avem că } 3^x = 5 \text{ și } f(5) + f(5^{\log_3 5}) = 8 \dots\dots\dots \mathbf{(2p)} \\ \text{De aici: } f(3) = f(5^{\log_3 5}) \Rightarrow 3 = 5^{\log_3 5} \Rightarrow 5^{\log_5 3} = 5^{\log_3 5} \Rightarrow \log_5 3 = \log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3} \Rightarrow \log_5 3 = 1, \\ \text{fals} \dots\dots\dots \mathbf{(3p)} \end{aligned}$$

Subiectul III

Determinați numerele $a, b, c > 0$ cu proprietatea că:

$$a^{\log_3 a} \cdot b + b^{\log_3 b} \cdot c + c^{\log_3 c} \cdot a = \sqrt[4]{27}.$$

Rezolvare:

Notăm: $\log_3 a = x, \log_3 b = y, \log_3 c = z \Rightarrow 3^{x^2+y} + 3^{y^2+z} + 3^{z^2+x} = \sqrt[4]{27}$(1p)

Cu inegalitatea mediilor $\sqrt[4]{27} \geq 3\sqrt[3]{3^{x^2+y^2+z^2+x+y+z}}$(2p)

Obținem $\frac{3}{4} \geq \frac{3+x^2+y^2+z^2+x+y+z}{3}$(1p)

De unde se obține: $(2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2 \leq 0 \Rightarrow x = y = z =$

$-\frac{1}{2}$(2p)

Finalizare: $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$(1p)

Subiectul IV

Fie $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ astfel încât: $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$ și $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$.

a) Demonstrați că: $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_n|^2 = n(|z|^2 + 1)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

b) Arătați că dacă $|z - z_1| \leq 1, |z - z_2| \leq 1, \dots, |z - z_n| \leq 1$, atunci: $z = 0$.

Prelucrare Gazeta Matematică

Rezolvare:

a) $|z - z_k|^2 = (z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_k) = |z|^2 + |z_k|^2 - \bar{z} \cdot z_k - z \cdot \bar{z}_k$, pentru $k = 1, 2, \dots, n$(2p)

Sumând aceste relații, vom obține: $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 - \bar{z} \cdot (z_1 + z_2 + \dots + z_n) - z \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n) = n|z|^2 + n - 0 - 0 = n(|z|^2 + 1)$(2p)

b) Ridicând la pătrat și sumând inegalitățile din enunț ajungem la: $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_n|^2 \leq n \Rightarrow n|z|^2 + n \leq n \Rightarrow |z| \leq 0 \Rightarrow z = 0$(3p)