



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 19 februarie 2017

Clasa a VIII- a

Barem de notare și corectare

SUBIECTUL I (7 puncte)

Fie $S_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a) Să se arate că $\frac{1}{n+1} < S_n < \frac{1}{n}$, oricare ar fi $n \geq 2$. (4p)

b) Calculați partea întreagă a numărului $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s_{20}} + \frac{1}{s_{16}} \right)$ (3p)

Gazeta Matematică nr 11/2016

Soluție

a) Majorând fiecare termen al sumei cu cel mai mare termen și minorând cu cel mai mic avem

$$n \cdot \frac{1}{n^2+n} < S_n < n \cdot \frac{1}{n^2+1} \dots\dots\dots 3p$$

Pe de altă parte este evidentă $\frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n}$ și astfel obținem inegalitatea cerută.....1p

b) Folosind inegalitatea de la punctul a) avem :

$$\frac{1}{2}(20+16) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s_{20}} + \frac{1}{s_{16}} \right) < \frac{1}{2}(21+17) \rightarrow 18 < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s_{20}} + \frac{1}{s_{16}} \right) < 19 \dots\dots\dots 2p$$

deci partea întreagă cerută este 18.....1p

SUBIECTUL II (7 puncte)

Fie ABCD un tetraedru cu $BC=CD$, iar bisectoarele unghiurilor $\angle ACB$, $\angle ACD$ și $\angle BCD$ intersectează laturile (AB), (AD) și (BD) în M, N respectiv P. Arătați că $CP \perp MN$.

Soluție

Din Teorema Bisectoarei în triunghiurile ABC și ACD avem că $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BC}$, $\frac{AN}{ND} = \frac{AC}{CD}$ 3p

Împreună cu faptul că $AC = CD$ avem $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{ND}$ și din Reciproca Teoremei lui Thales, $MN \parallel BD$ 2p

Triunghiul BCD este isoscel, (CP) mediană, deci și înălțime și $CP \perp BD$.

Deci $CP \perp MN$ 2p

SUBIECTUL III (7 puncte)

a) Să se determine perechile de numere întregi x și y care verifică ecuația:

$$x^3 - y^3 = (x - y)^2 \quad (4p)$$

b) Fie a, b, c, d numere reale nenegative cu $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2017$. Să se arate că:

$$\sqrt{2017 - a^2} + \sqrt{2017 - b^2} + \sqrt{2017 - c^2} + \sqrt{2017 - d^2} \geq \sqrt{3}(a + b + c + d) \quad (3p)$$



Soluție

a). Factorizând, relația se scrie $(x-y)(x^2+xy+y^2-x+y)=0$ 1p

Perechile $x=y$ sunt soluții. Celelalte provin din

$$x^2+xy+y^2-x+y=0 \rightarrow (x+y)^2+(x-1)^2+(y+1)^2=2$$
1p

Deoarece numerele sunt întregi avem că: $(x-1)^2 \leq 1 \Rightarrow |x-1| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$ 1p

Studiind cazurile obținem

$x=0$, $y=0$, sau -1

pentru $x=1$, $y=0$ sau $y=-2$ și

pentru $x=2$, $y=-2$ sau -1 .

Mulțimea soluțiilor este $S=\{(k,k)/k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,-1), (1,0), (1,-2), (2,-2), (2,-1)\}$ 1p

b). Ținând cont de relația din ipoteza inegalitatea se rescrie

$$\sqrt{b^2+c^2+d^2} + \sqrt{a^2+c^2+d^2} + \sqrt{a^2+b^2+d^2} + \sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq \sqrt{3}(a+b+c+d) \dots 1p$$

Pornind de la $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc \rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$

Deci $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq \sqrt{3}^{-1}(a+b+c)$ 2p

Sumând respectiv toate relațiile obținem inegalitatea dorită.

SUBIECTUL IV (7 puncte)

. Fie ABCD un pătrat de latura 2a. Pe planul sau, de aceeași parte, se ridică perpendicularele AM și CN cu $AM=a$ și $CN=2a$. Arătați că

a). $MO \perp (BND)$, unde O este centrul pătratului.

b). Planele (MBN) și (MDN) sunt perpendiculare.

Soluție

a). Datorită perpendicularității dreptelor AM și CN pe plan, triunghiurile MAO și OCN sunt

$$\frac{AM}{OC} = \frac{AO}{NC}$$

dreptunghice și se verifică1p

Deci triunghiurile sunt asemenea (LUL) și astfel unghiurile AOM și CON sunt complementare,

adică $MO \perp ON$ 1p

Din Teorema celor trei perpendiculare rezultă că $MO \perp DB$.

Cum $ON, DB \subset (BND)$; $ON \cap DB = \{O\}$, avem că $MO \perp (BND)$ 1p

b). Triunghiurile MBN și MDN sunt congruente (LLL) și piciorul înălțimii din B pe MN coincide cu piciorul înălțimii din D pe MN.....

$$(MBN), (MDN) = (BT, DT) = \widehat{DBT}$$

Deoarece MN este perpendiculară pe BT și DT, MN este perpendiculară pe planul (DBT) care-l conține pe OT.

Calculând OT în triunghiul MON avem

$$OT = \frac{MO \cdot ON}{MN} = \frac{a \cdot \sqrt{3}a \cdot \sqrt{5}}{3a} = a \cdot \frac{\sqrt{15}}{3}$$
2p

$$OT = a \cdot \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{BD}{2}$$

În triunghiul DOB mediana , deci $m(\angle DTB) = 90^\circ$ și astfel planele sunt perpendiculare.....1p