



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a X-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se determine toate perechile ordonate $(x, y) \in R \times R$ pentru care

$$x^{2024} + y^{2024} \geq 1 \text{ și } \sqrt[2024]{|x|} + \sqrt[2024]{|y|} \leq 1.$$

Soluție și barem

Substituția $u = |x|, v = |y|$ conduce la sistemul $\begin{cases} u^{2024} + v^{2024} \geq 1 & (1) \\ \sqrt[2024]{u} + \sqrt[2024]{v} \leq 1 & (2) \end{cases}$ cu nec. $u, v \geq 0$

..... 1punct
 $u > 1 \Rightarrow \sqrt[2024]{u} > 1$. Dar $\sqrt[2024]{v} \geq 0 \Rightarrow \sqrt[2024]{u} + \sqrt[2024]{v} > 1$, contradicție cu (2)

..... 1punct
Analog, dacă $v > 1 \Rightarrow$ contradicție cu (2), deci $\begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$

..... 1punct
 $\begin{cases} 0 < u < 1 \\ 0 < v < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^{2023} < 1 \\ v^{2023} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^{2024} < u \\ v^{2024} < v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u < \sqrt[2024]{u} \\ v < \sqrt[2024]{v} \end{cases} \Rightarrow u + v < \sqrt[2024]{u} + \sqrt[2024]{v} \leq 1 \Rightarrow u + v < 1 \quad (3)$

..... 1punct
 $\begin{cases} u^{2024} < u \\ v^{2024} < v \end{cases} \Rightarrow 1 \leq u^{2024} + v^{2024} < u + v \Rightarrow 1 < u + v \quad (4)$. Din (3) și (4) $\Rightarrow 1 < 1$ contradicție

..... 1punct
Deci $\begin{cases} u \in \{0;1\} \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ v \in \{0;1\} \end{cases}$ În ambele cazuri, folosind (1) și (2), se obțin soluțiile

$\begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases}; \begin{cases} u=1 \\ v=0 \end{cases}$ 1punct

Revenind la substituție obținem $(x, y) \in \{(0;1), (1;0), (0;-1), (-1;0)\}$

..... 1punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapă locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a X-a

Subiectul 2 (7 puncte)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \dots, x_n$ numere reale astfel încât $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$
Să se arate că $2^{x_1^2} + 2^{x_2^2} + \dots + 2^{x_n^2} \geq 2n$.

Soluție și barem

Din inegalitatea mediilor avem:

$$2^{x_1^2} + 2^{x_2^2} + \dots + 2^{x_n^2} \geq n \cdot \sqrt[n]{2^{x_1^2} \cdot 2^{x_2^2} \cdot \dots \cdot 2^{x_n^2}} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\begin{aligned} 2^{x_1^2} + 2^{x_2^2} + \dots + 2^{x_n^2} &\geq n \cdot \sqrt[n]{2^{x_1^2} \cdot 2^{x_2^2} \cdot \dots \cdot 2^{x_n^2}} = n \cdot \sqrt[n]{2^{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} = \\ &= n \cdot 2^{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \dots\dots\dots 1 \text{ punct} \end{aligned}$$

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x$ este strict crescătoare..... 1 punct

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\text{Rezultă } 2^{x_1^2} + 2^{x_2^2} + \dots + 2^{x_n^2} \geq n \cdot 2^{\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2} = 2n \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapă locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a X-a

Subiectul 3 (7 puncte)

Fie $a, b \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|a| = |b| = |a - b|$ și $z = \frac{a}{b}$.

Să se demonstreze că:

- i) $|z| = 1$ și $z \notin \{-1, 1\} \Rightarrow$
- ii) Determinați mulțimea $\{z^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Soluție și barem

i) $|z| = \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} = 1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Dacă $z = 1 \Rightarrow a = b \Rightarrow |a| = |b| = 0 \Rightarrow a = b = 0$ fals.....1 punct

Dacă $z = -1 \Rightarrow b = -a \Rightarrow |a| = |b| = 2|a|$ și cum $a \neq 0 \Rightarrow 1=2$, fals.

Deci $z \notin \{-1, 1\} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

ii) Din enunț obținem $|a| = |b| = |b| \left| \frac{a}{b} - 1 \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a}{b} - 1 \right| \Rightarrow$
 $\Rightarrow |z| = |z - 1| = 1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$|z|^2 = |z - 1|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = (z - 1)(\bar{z} - 1) = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = z \cdot \bar{z} -$
 $-z - \bar{z} + 1 = 1 \Rightarrow z + \bar{z} = 1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Rezultă $z + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z^3 + 1 = 0$

Deci $z^3 = -1$, $z \neq -1$ și rădăcinile ecuației $z^2 - z + 1 = 0$ sunt

$z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, $\bar{z} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{z} = z^{-1} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$\{z^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \left\{ 1, z, z^2, -1, -z, -z^2 = \frac{1}{z} = \bar{z} \right\} \dots\dots\dots 1$



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a X-a

Subiectul 4 (7 puncte)

Demonstrați că funcția $f: N^* \rightarrow R, f(n) = \log_{n+1} n$ este strict crescătoare

Soluție și barem

Trebuie să arătăm că $f(n) < f(n+1) \Leftrightarrow \log_{n+1} n < \log_{n+2}(n+1)$
 $\forall n \in N^* \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$\log_{n+1} n < \log_{n+2}(n+1) \Leftrightarrow \frac{\lg n}{\lg(n+1)} < \frac{\lg(n+1)}{\lg(n+2)} \Leftrightarrow (\lg n)(\lg(n+2)) <$
 $< (\lg(n+1))^2 \Leftrightarrow \sqrt{(\lg n)(\lg(n+2))} < \lg(n+1) \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

Însă $\sqrt{(\lg n)(\lg(n+2))} < \frac{\lg n + \lg(n+2)}{2} = \lg \sqrt{n(n+2)} \dots\dots\dots .2 \text{ puncte}$

Este suficient să demonstrăm că:

$\lg \sqrt{n(n+2)} < \lg(n+1) \Leftrightarrow \sqrt{n(n+2)} < n+1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$\sqrt{n(n+2)} < \frac{n+n+2}{2} = n+1 \text{ sau } n(n+2) < (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 + 2n <$
 $< n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 0 < 1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$