

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

28 februarie 2016

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. probleme	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	Pentru $n=0$, obținem $z=\bar{z} \Rightarrow$ soluțiile ecuației sunt: $z \in \mathbb{R}$ Fie $n \geq 1$, observăm că $z=0$ este soluție. Fie $z \neq 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 1$; Aplicând modulul ecuației $\Rightarrow z ^{n+1} = \bar{z} \Rightarrow z ^n = 1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1$ Atunci ecuația devine: $z^{n+1} = \frac{1}{z} \Rightarrow z^{n+2} = 1 \Rightarrow z_k = \cos \frac{2k\pi}{n+2} + i \sin \frac{2k\pi}{n+2}$, $k \in \overline{0, n+1}$; Pentru $n \geq 1$, soluțiile ecuației sunt: $z \in \{0\} \cup \left\{ \cos \frac{2k\pi}{n+2} + i \sin \frac{2k\pi}{n+2}, k \in \overline{0, n+1} \right\}$	1p 1p 1p 1p
	b) Din condiția $\frac{y}{x} > 0 \Rightarrow x > 0, y > 0$ sau $x < 0, y < 0$; Se observă că dacă perechea (x, y) este soluție, atunci și perechea $(-x, -y)$ este soluție. Este suficient să rezolvăm sistemul pentru cazul $x > 0, y > 0$; Prima ecuație se scrie: $x^2 + \log_2 x = y^2 + \log_2 y$; (1) Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \log_2 x$, f este strict crescătoare $\Rightarrow f$ este injectivă; $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \xrightarrow{f \text{ injectivă}} x = y$; Sistemul de ecuații devine: $\begin{cases} x = y \\ 3^{2 \cdot x^2 - 1} - 4 \cdot 3^{x^2} + 9 = 0 \end{cases}$ Notăm $3^{x^2} = t, t > 0$ $t^2 - 12 \cdot t + 27 = 0 \Rightarrow t_1 = 3, t_2 = 9 \Rightarrow x = \pm 1, x = \pm \sqrt{2}$; Soluții sunt: $(1, 1); (-1, -1); (\sqrt{2}, \sqrt{2}); (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	1p 1p

	Dar $f(x_1) \in A \Rightarrow f(x_1) \geq x_1$; Dacă presupunem că $f(x_1) > x_1$, atunci șirul (a_n) este strict crescător, și cum termenii șirului $(a_n) \in A \Rightarrow$ că mulțimea A ar conține o infinitate de elemente-fals. Atunci $f(x_1) = x_1$; Funcția f este injectivă pentru că: din $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow 2 \cdot f(x) - x = 2 \cdot f(y) - y \Rightarrow x = y$ Din f injectivă $\Rightarrow f(x_2) > x_1$. Aplicând procedeul de mai sus pentru x_2, obținem $f(x_2) = x_2$; Continuând, prin aplicarea procedeului, obținem că $f(x) = x, (\forall) x \in A$.	1p 1p 1p
4.	Vom demonstra că $p - \frac{kp-1}{n} > \frac{1}{k}, 2 \leq k \leq n-1, (1)$ Avem $(1) \Leftrightarrow p \cdot k \cdot n - k^2 \cdot p + k > n \Leftrightarrow k \cdot p \cdot (k-n) - (k-n) < 0 \Leftrightarrow (k-n) \cdot (kp-1) < 0$; pentru $2 \leq k \leq n-1$, această ultimă inegalitate este adevărată. Din (1) obținem: $p - \frac{2 \cdot p - 1}{n} > \frac{1}{2}$ $p - \frac{3 \cdot p - 1}{n} > \frac{1}{3}$ $p - \frac{(n-1)p-1}{n} > \frac{1}{n-1}$ $p - \frac{np-1}{n} = \frac{1}{n}$ $p - \frac{p-1}{n} \geq 1 \text{ (deoarece } n \cdot p - p + 1 \geq n \Leftrightarrow (p-1) \cdot (n-1) \geq 0 - \text{adevărat)}$ Înmulțind aceste inegalități membru cu membru, obținem inegalitatea din enunț.	3p 2p
	Pentru $p=1$, obținem $\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n!}$ sau $(n!)^2 > n^n$. Această inegalitate se demonstrează și prin inducție matematică, folosind inegalitatea $n+1 > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, n \geq 3.$	2p