1. $ab+bc+ca=a^2b^2c^2$ deci $a^2b^2=\frac{ab+bc+ca}{c^2}$ și $1+a^2b^2=\frac{ab+bc+ca+c^2}{c^2}=\frac{(a+c)(b+c)}{c^2}$
   Analog
   $1+b^2c^2==\frac{(a+b)(a+c)}{a^2}$, $1+c^2a^2==\frac{(a+b)(b+c)}{b^2}$ …………………………………..3 p
   Deci numărul se va scrie $\sqrt{\frac{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2}{a^2b^2c^2}}=\left|\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc}\right|\in\mathbb{Q}$……………4 p

2. Întrucât $1952=4\cdot 488$, folosind primele două relații ale sistemului, obținem:

$25x^2+20y^2+13z^2\le 4\cdot(3xy+6yz+4zx)\Leftrightarrow 25x^2+20y^2+13z^2-12xy-24yz-16zx\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(9x^2-12xy+4y^2)+(16y^2-24yz+9z^2)+(4z^2-16zx+16x^2)\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(3x-2y)^2+(4y-3z)^2+(2z-4x)^2\le 0$. ………………………………………………3 p

Întrucât $(3x-2y)^2\ge 0,(4y-3z)^2\ge 0,(2z-4x)^2\ge 0$,

deducem că $3x-2y=4y-3z=2z-4x=0$.

De aici rezultă că $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k\Rightarrow x=2k,y=3k,z=4k$. A treia relație a sistemului devine:

$2k+3k+4k=18$, deci $k=\frac{18}{2}=9$ și $x=2\cdot 9=18, y=3\cdot 9=27, z=4\cdot 9=36$. ……4 p

3. Notăm $SA=a, SB=b, SC=c, SD=d$, deci a, b, c, d naturale nenule

a)

Avem urmatoarele inegalități:

- in $\triangle SAB : |a-b| < 1$ si, Cum a, b naturale nenule, rezulta ca $a-b=0$, deci $a=b$;
- in $\triangle SBC : |b-c| < 1$ si, cum b, c naturale nenule rezultă $b = c$
- in $\triangle SCD : |c-d| < 1$ si, cum c, d naturale nenule rezultă $c = d$

in $\triangle SDA : |d-a| < 1$ deci $a = d$ I

Rezultă $a=b=c=d$, deci triunghiurile SAB, SBC, SCD, SDA sunt isoscele congruente, cu bazele de lungime 1……3p

b) Fie $SO \perp (ABC), O \in (ABC)$. Întrucât $SA=SB=SC=SD$, rezultă congruența triunghiurilor SOA, SOB, SOC, SOD (sunt dreptunghice si au cateta $[SO]$ comună), deci $OA=OB=OC=OD$. Rezultă că rombul $ABCD$ este inscriptibil, deci este pătrat……………………………………………………………..2p

c)Avem $SA=SB=SC=SD=a$ si, cum $SC \perp SA$, conform teoremei lui Pitagora, avem $SA^2+SC^2=AC^2=AB^2+BC^2$, deci $2a^2=2$,adică $a=1$. Așadar fețele laterale ale piramidei sunt triunghiuri echilaterale de latură 1……………………………………………………………………………………………..1p

Considerând M mijlocul lui [BC] va rezulta sin $\widehat{OMS} = \frac{SO}{SM}$, unde SO = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ din triunghiul SOB și SM = $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Rezultă sin $\widehat{OMS} = \sqrt{\frac{2}{3}}$……………………………………………………………………………………………………1p

4. Dacă Q este piciorul înălțimii din C, din teorema celor trei perpendiculare va rezulta $MQ \perp AB$ ………………………………………………………………….2 p
   Deci $MA^2 - MB^2 = MQ^2 + AQ^2 - MQ^2 - BQ^2 = AQ^2 - BQ^2 = (AC^2 - CQ^2) - (BC^2 - CQ^2) = AC^2 - BC^2, deci\ MA^2 - MB^2 = AC^2 - BC^2$ de unde rezultă relația din enunț.. …………………………………………………………………………5 p