

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA ZONALĂ, BLAJ, 16.02.2013
CLASA A XII-A

I. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7; +; \cdot)$ și mulțimea $H = \{x^2 / x \in \mathbb{Z}_7\}$.

a) Să se determine elementele mulțimii H .

b) Să se arate că pentru orice element $a \in \mathbb{Z}_7$, există $x, y \in \mathbb{Z}_7$ astfel încât $a = x^2 + y^2$.

c) Să se arate că $\{x^{2000} / x \in \mathbb{Z}_7\} = H$.

d) Să se arate că nu există nici un morfism de grupuri $f: (\mathbb{Z}_6; +) \rightarrow (\mathbb{Z}_7^*; \cdot)$ cu $f(\bar{2}) = \hat{3}$, unde $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}\}$, iar $\mathbb{Z}_7 = \{\hat{0}; \hat{1}; \hat{2}; \hat{3}; \hat{4}; \hat{5}; \hat{6}\}$.

II. 1. Pentru fiecare $t; n \in \mathbb{Z}$ se consideră matricea $A(n) = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$ și mulțimile $G = \{A(k) / k \in \mathbb{Z}\}$

și $H_t = \{A(k \cdot t - 1) / k \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se calculeze $A(n) \cdot A(p)$.

b) Admițând că $(G; \cdot)$ este grup abelian, unde " $\cdot$ " reprezintă înmulțirea matricilor, să se arate că pentru orice $t \in \mathbb{Z}$, H_t este subgrup pentru $(G; \cdot)$.

2. Se consideră grupul $(G; *)$ iar a un element din G . Pe G se definește operația " $\circ$ " prin $x \circ y = x * a * y$; $(\forall) x, y \in G$. Demonstrați că $(G; \circ)$ este grup.

III. 1. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $I_n = \int_{\frac{n}{e^2}}^{\frac{n+1}{e^2}} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx$. Să se arate că șirul

$(I_n)_{n \geq 1}$ formează o progresie aritmetică.

2. Fie $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de trei ori derivabilă, cu derivata a treia continuă, astfel încât

$f(a) = f(b) = f'(b) = 0$. Să se arate că $\int_a^b f(x) f'''(x) dx \geq 0$.

IV. Se consideră funcțiile $f; F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$ și F o primitivă a lui f .

a) Să se calculeze $\int f(x) dx$.

b) Să se determine $c \in (1; 3)$ astfel încât $\int_1^3 \frac{f(x)}{\sin x} dx = 2c^2$.

c) Să se arate că funcția F nu are limită la $+\infty$.