

BAREM DE NOTARE – clasa a X-a

Problema	Soluție	Punctaj
1	a) $7f(-x) + 4f(x-1) = -6x - 19$ $x \rightarrow 1-x \Rightarrow 7f(x-1) + 4f(-x) = 6x - 25$ $\Rightarrow f(-x) = -2x - 1 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$	1,5p 1p
	b) f injectivă + surjectivă	1p
	c) $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ $(f(x))^3 + 8(f^{-1}(x))^3 = x^2 - x + 1$ $\Leftrightarrow 9x^3 - 9x^2 + 9x = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow (9x-1)(x^2 - x + 1) = 0$ $x_1 = \frac{1}{9}, x_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, x_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{9} + 2 = \frac{19}{9}.$	1p 1,5p 1p
2	Pentru $x \leq 0$ ecuația nu are soluții: $5^{2x^2-10x+7} > 0$ iar $\frac{x}{x^2+4} \leq 0$ Pentru $x > 0$ logaritmand în baza 5 egalitatea, se obține: $2x^2 - 10x + 7 = \log_5 x - \log_5(x^2 + 4)$ $\log_5(x^2 + 4) + 2(x^2 + 4) = \log_5 x + 10x + 1$ $\log_5(x^2 + 4) + 2(x^2 + 4) = \log_5(5x) + 2 \cdot 5x \quad (1)$ Funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_5 x + 2x$ este suma a două funcții strict crescătoare, deci este injectivă. Ecuația (1) este echivalentă cu: $f(x^2 + 4) = f(5x)$ și f injectivă se obține: $x^2 + 4 = 5x$ ecuația are soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = 4$	1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p
3	Fie $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Egalitatea $z_1 + z_2 + z_3 = z_2 + z_3$ devine $\left (z_2 + z_3) \left(\frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1 \right) \right = z_2 + z_3 \Leftrightarrow z_2 + z_3 \cdot \left \frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1 \right = z_2 + z_3$ și cum $z_2 + z_3 \neq 0$, rezultă $\left \frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1 \right = 1 \Leftrightarrow a + 1 + bi = 1$ de unde $(a+1)^2 + b^2 = 1$. (1) Avem $z_2 + z_3 = z_1 \Leftrightarrow \left \frac{z_1 + z_3}{z_1} \right = 1 \Leftrightarrow a + bi = 1$ adică $a^2 + b^2 = 1$. (2)	1p 1p 1p 1p 1p 1p

	Din (1) rezultă $b^2 = 1 - (a+1)^2$ și înlocuind în (2) obținem $a^2 + 1 - (a+1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2a + 1 = 0, \text{ deci } a = -\frac{1}{2} \text{ iar } b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$ Există două soluții : $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$	1p
4	1) Fie punctele $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(-z_3)$. $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 + (-z_3) \Leftrightarrow M_1 M_4 M_2 O$ paralelogram. $OM_1 = OM_2 = r \Rightarrow M_1 M_4 M_2 O$ romb $OM_4 = -z_3 = r \Rightarrow m(M_1 \hat{O} M_2) = 120^\circ \Rightarrow m(M_1 \hat{M}_3 M_2) = 60^\circ$ Analog $m(M_1 \hat{M}_2 M_3) = 60^\circ \Rightarrow \Delta M_1 M_2 M_3$ echilateral.	2p 2p 2p 1p