

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - CLASA A XI-A

Subiecte

Problema 1. Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $\det A = 9$. Arătați că $\det(A^2 + 5A + 9I_2)$ este un pătrat perfect.

,Supliment Gazeta Matematică nr 11\2023

Problema 2. Fie șirul cu termenul general, $a_n = \frac{(2n+1) \cdot (n^2 - 2n + 2)}{(n^2 + 1) \cdot (n^4 + 4)}, (\forall) n \geq 1$.

a) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$.

b) Să se demonstreze inegalitatea: $\prod_{k=1}^n (1 + a_k) < \sqrt{e}$.

Prof. George-Florin Șerban, Brăila

Problema 3. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit astfel: $a_0 = 0, a_{n+1} = e^{a_n} + 1, (\forall) n \in \mathbb{N}$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1}}{a_n}.$$

Prof. Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Problema 4. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2023 & 2024 & 2024 \\ 2024 & 2023 & 2024 \\ 2024 & 2024 & 2023 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $\text{Tr}(A^{2024} - I_3) : 2024$.

Prof. George-Florin Șerban, Brăila