

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 8 februarie 2020

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea $G = (-1, 1)$ se definește operația $*$ prin $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. Știind că $(G, *)$ este un grup, determinați numărul real m pentru care funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow (-1, 1)$, $f(x) = \frac{mx-1}{x+1}$ stabilește un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ și $(G, *)$.
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se consideră o lege de compoziție $*$ care are următoarele proprietăți:
 - (a) $(x * y) \cdot (x * z) = x * (y + z)$, $\forall x, y, z \in M$;
 - (b) $x * 1 = x$, $\forall x \in M$.Arătați că: (i) $2 * 4 \in \mathbb{Q}$;
(ii) $4 * \frac{1}{4} \notin \mathbb{Q}$;
(iii) $\sqrt{2020} * 2020 = 2020^{1010}$.
3. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $I_n = \int x^n \sqrt{x^2 + 1} dx$.
 - a) Calculați I_1 ;
 - b) Stabiliți o relație de recurență pentru șirul $(I_n)_{n \geq 1}$.
4. Determinați primitivele funcției $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{(x \cdot \cos x - \sin x)(x \cdot \sin x + \cos x)}$.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.