



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, Iași

14.02.2014

CLASA a XII-a

Problema 1. a) Să se determine numărul de elemente inversabile din monoidul $(\mathbb{Z}_{2014}, \cdot)$

b) Să se demonstreze că mulțimea tuturor elementelor inversabile din monoidul anterior este un grup abelian.

BAREM: a) Un element este inversabil dacă și numai dacă este prim cu 2014. Deci avem

936 elemente inversabile4p

b) Produsul a două elemente inversabile, este inversabil și inversul unui element inversabil, este și el inversabil. Evident înmulțirea este comutativă și asociativă3p

Problema 2. Să se calculeze $\int \frac{1}{x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 20} dx, x > 2.$

BAREM: Vom descompune astfel :

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 20 = (x-2)(x^3 - 2x^2 - 3x + 10) = (x-2)(x+2)(x^2 - 4x + 5) \dots\dots\dots 3p$$

Se desface integrala în următoarele trei integrale :

$$\int \frac{a}{x-2} dx + \int \frac{b}{x+2} dx + \int \frac{cx+d}{x^2-4x+5} dx \dots\dots\dots 2p$$

Finalizare2p

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian cu 2014 elemente. Să se demonstreze că

funcția $f: G \rightarrow G, f(x) = x^3$, este un automorfism de grupuri.

BAREM: Grupul este abelian deci funcția dată este morfism de grupuri2p

Cu ajutorul Teoremei lui LAGRANGE, se arată că avem $\text{Ker}(f) = \{e\}$, de aici vom avea

că funcția dată este injectivă.....3p

Funcția este definită de la o mulțime finită în ea însăși deci este și surjectivă2p



Problema 4. Să se demonstreze că funcția , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin^n \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, are primitive

pe $\mathbb{R}$ pentru $n=3$ și pentru o singură valoare a parametrului real a și nu are primitive pe $\mathbb{R}$ pentru $n=2$ și valoarea lui a găsită anterior.

BAREM: Se demonstrează că funcția $g(x) = \begin{cases} c \sin \frac{d}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ are primitive pe $\mathbb{R}$ 2p

Se folosește formula $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ și se arată că funcția din enunț (pt $n=3$) are primitive doar pentru $a=0$3p

Se folosește formula $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ și se arată că funcția din enunț (pt $n=2$) nu are primitive pentru $a=0$ (ar trebui ca a să fie egal cu $1/2$ pentru a avea primitive).....2p

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.