



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013

CLASA a IX-a

PROBLEMA 1.

a) $(a+b)\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right) = x^2 + y^2 + \frac{a}{b}y^2 + \frac{b}{a}x^2 \geq (x+y)^2$ (1p)

b) Inegalitatea este echivalenta cu $t(t-1)(t+a^2) \leq 0$ adevarata (2p)

c) Pentru inegalitatea din stanga avem folosind a)

$$\sum \frac{1}{a^2 - x^2} \geq \frac{9}{3a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{9}{3a - \frac{1}{3}} = \frac{27}{9a^2 - 1}$$

Am folosit $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = \frac{1}{3}$ (2p) . Inegalitatea din dreapta

,dupa efectuarea unor calcule , este echivalenta cu $\sum \frac{x^2}{a^2 - x^2} \leq \frac{1}{a^2 - 1}$ (1)

Luam in b) $t=x,y,z$ adunam cele trei inegalitati si folosind conditia $x+y+z=1$ rezulta inegalitatea de demonstrat.(2p)

PROBLEMA 2.

Exista $k \in \mathbb{N}^*$ astfel incat $\left\lceil \frac{1}{1-a} \right\rceil = k$ deci $k \leq \frac{1}{1-a} < k+1$ de unde obtinem

$a \in \left[\frac{k-1}{k}, \frac{k}{k+1} \right)$, (1) Membrul stang al inegalitatii

$M_s = [a(1+k)] + 1 = k - 1 + 1 = k$ deoarece $(1+k)a \in \left[k - \frac{1}{k}, k \right)$.

PROBLEMA 3.

Notam $\frac{AM}{BM} = a; \frac{DN}{CN} = b; \frac{OB}{OD} = c; \frac{OC}{OA} = d$.Atunci avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{1+a} \overrightarrow{OA} + \frac{a}{1+a} \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{ON} &= \frac{1}{1+b} \overrightarrow{OD} + \frac{b}{1+b} \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OD} &= -\frac{1}{c} \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} = -d \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{ON} &= -\frac{bd}{1+b} \overrightarrow{OA} - \frac{1}{c(1+b)} \overrightarrow{OB}\end{aligned} \quad (4p)$$

Punctele O,M,N sunt coliniare

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \text{ coliniar cu } \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{1+a}}{-\frac{bd}{1+b}} = \frac{\frac{a}{1+a}}{-\frac{1}{c(1+b)}} \Leftrightarrow abcd = 1$$

$$\Leftrightarrow AM \cdot DN \cdot OB \cdot OC = BM \cdot CN \cdot OA \cdot OD$$

Ceea ce trebuia demonstrate. (3p)

PROBLEMA 4.

Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ notam cu $S(a,b)$ sistemul $\begin{cases} x-y=a \\ x+y=b \end{cases}$. Afirmam ca:

- (i) $S(a,b)$ are soluție unică $\Leftrightarrow a$ și b au aceeași paritate.
- (ii) $S(a,b)$ nu are soluții $\Leftrightarrow a$ și b au parități diferite.
- (iii) $S(a,b)$ și $S(c,d)$ au aceeași soluție $\Leftrightarrow a=c$ și $b=d$.

$$|x^2 - y^2| = n \Leftrightarrow |x-y| \cdot |x+y| = n \Leftrightarrow \begin{cases} |x-y| = d \\ |x+y| = d' \end{cases}$$

unde $dd' = n$. Soluțiile sistemului de mai sus se obțin prin rezolvarea sistemelor $S(d,d')$, $S(-d,d')$, $S(d,-d')$, $S(-d,-d')$. Numărul tuturor acestor sisteme este $4\tau(n)$, unde $\tau(n)$ reprezintă numărul divizorilor lui n .

Potrivit afirmațiilor de mai sus aceste sisteme vor furniza câte o soluție doar dacă d și d' au aceeași paritate. Avem trei situații:

- $n=4k+2 \Leftrightarrow$ oricare d și d' au parități diferite, deci $f(n)=0$
- $n=\text{impar} \Leftrightarrow$ oricare d și d' sunt impare, deci $f(n)=4\tau(n)$.
- $n=4k \Rightarrow d$ și d' sunt pare, $d=2s$ și $d'=2s'$, deci $\frac{n}{4} = ss'$ de unde $f(n)=4f\left(\frac{n}{4}\right)$.

Obs. Dacă $n = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \dots \cdot p_q^{l_q}$ atunci $\tau(n) = (l_1+1)(l_2+1)\dots(l_q+1)$.



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



Deoarece 2013 este impar și are descompunerea $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ atunci avem $f(2013) = 4$ $\tau(2013) = 32$. (Se acorda 3p pentru calculul corect al lui $f(2013)$)

BAREM CLASA a X-a

Problema 1.

$$f(2014) = 2014 \Rightarrow \frac{a_1^{2014} + a_2^{2014} + \dots + a_{2014}^{2014}}{2014} = 1(1p)$$

$$f(-2014) = 2014 \Rightarrow \frac{2014}{\frac{1}{a_1^{2014}} + \frac{1}{a_2^{2014}} + \dots + \frac{1}{a_{2014}^{2014}}} = 1(1p)$$

Deoarece media aritmetica a unor numere este egala cu media lor armonica

$\Leftrightarrow$ numerele sunt egale, deduce ca

$$a_1^{2014} = a_2^{2014} = \dots = a_{2014}^{2014} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_{2014} = a (\text{notatie}) (3p)$$

Atunci $f(x) = 2014 \cdot a^x$ iar din $f(2014) = 2014$ rezulta $a^{2014} = 1 \Rightarrow a = 1$ si in concluzie $f(x) = 2014$, deci constanta.

Problema 2.

a) Evident (1p)

b) Avem $b + 4 \geq 4\sqrt{b}$ (din a)), iar de aici $\frac{4b}{4+b} \leq \sqrt{b}$ care prin logaritmare in baza

$a \in (0, 1)$ obtinem $\log_a \frac{4b}{4+b} \geq \log_a \sqrt{b} = \frac{1}{2} \log_a b$. Analog obtinem inca doua

inegalitati, iar prin adunare rezulta $M_s \geq \frac{1}{2} (\log_a b + \log_b c + \log_c a) \geq \frac{3}{2}$ unde am

folosit inegalitatea mediilor. (6p)

Problema 3.

a) Din $w \in A$ avem $w = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3$. Atunci

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + z_3 - w| + |w| &= |(1 - \alpha_1)z_1 + (1 - \alpha_2)z_2 + (1 - \alpha_3)z_3| + |\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3| \leq \\ \sum (1 - \alpha_i) |z_i| + \sum \alpha_i |z_i| &= |z_1| + |z_2| + |z_3|. \end{aligned} \quad (3p)$$

b) Analog cu punctul a). (4p)

Problema 4.

a) Punctele A, B, C, D de afixe a, b, c, d se afla pe un cerc de centru O si de raza

r. Fie M si N punctele de afixe $a+b$ si $c+d$. Din $\frac{(a+b) + (c+d)}{2} = 0$ rezulta ca

O este mijlocul segmentului MN. Deoarece OAMB este romb rezulta $AB \perp OM$, analog $CD \perp MN$, deci AB este paralel cu CD. Analog demonstram ca AD este paralel cu BC, deci ABCD este un paralelogram inscriptibil, i.e. ABCD este dreptunghi. (3p)

b) Notam $S=a+b+c+d$. Aplicand inegalitatea C-B-S conditiei din enunt avem

$$\left(\frac{16}{3}\right)^2 = (AG_1 + BG_2 + CG_3 + DG_4)^2 \leq 4(AG_1^2 + BG_2^2 + CG_3^2 + DG_4^2) = \frac{4}{9} \left(\sum |4a - S|^2\right)$$

Iar de aici, folosind $z\bar{z} = |z|^2$ obtinem $S=a+b+c+d=0$. Aplicand punctul a) obtinem cerinta problemei, i.e. ABCD=dreptunghi. (4p)

BAREM CLASA a XI-a

Problema 1.

Aplicand determinantul avem $\det(X^2) = (\det(X))^2 = 49 \Rightarrow \det(X) = \pm 7$.

Luam $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din Cayley-Hamilton avem $X^2 - \text{tr}(X)X \pm 7I_2 = O_2$

Pentru $\det(X)=7$ obtinem solutiile: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ si $B=-A$.

Pentru $\det(X)=-7$ obtinem solutiile: $C = \frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ si $D=-C$.

Evident $A^{2013} + B^{2013} + C^{2013} + D^{2013} = O_2$.

Problema 2.

- (i) Se verifica prin calcul.(3p)
- (ii) Ecuația se scrie $\det(A)x^2 + (\text{tr}(A)\text{tr}(B) - \text{tr}(AB))x + \det(B) = 0$. Condiția ca sa avem doua solutii distincte (avem ecuație de gradul doi, $\det(A) \neq 0$) este $(\text{tr}(A)\text{tr}(B) - \text{tr}(AB))^2 \geq 4\det(A)\det(B)$ In care folosind punctul (i) si $\det(A+B) + \det(A-B) = 2(\det(A) + \det(B))$ obtinem ceea ce se cere demonstrat.(4p)

Problema 3.

Cu inegalitatea mediilor avem :

$$0 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{n2^n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^n}} \right)$$

Utilizand Lema Stolz-Cesaro si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^n}}}{2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{2^{n+1}}}}{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2^{n+1}}} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 0.$$

Teorema clestelui ne asigura ca limita ceruta este zero.

PROBLEMA 4.

Deoarece $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{2^2}$ si folosind formula $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ obtinem

$x_2 = \cos \frac{\pi}{2^3}$ si prin inductie matematica $x_n = \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$. (3p) Limita ceruta devine

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_1 x_2 \dots x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \right).$$

Folosind $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ obtinem $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{\pi}$. (4p)

Barem clasa a XII-a

Problema 1.

Verificarea axiomelor .(7p)

Problema 2.

a) Dacă f este endomorfism al grupului G , atunci $f(xy) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in G$.

Atunci $(xy)^2 = x^2y^2$, $\forall x, y \in G$, adică $xyxy = xxyy$, $\forall x, y \in G$. Simplificând la stânga prin x și la dreapta

prin y obținem $yx = xy$, $\forall x, y \in G$, deci $(G, \cdot)$ este grup abelian. **(2 puncte)**

Dacă $(G, \cdot)$ este grup abelian, atunci $\forall x, y \in G$ avem

$f(xy) = (xy)^2 = xyxy = xxyy = x^2y^2 = f(x)f(y)$, adică f este endomorfism al grupului G . **(1 punct)**

b) Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu $2n + 1$ elemente ($n \in \mathbb{N}$). Dacă e este elementul neutru al grupului, atunci $x^{2n+1} = e$, $\forall x \in G$. **(1 punct)**

Dacă $a, b \in G$ și $f(a) = f(b) \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a^{2n} = b^{2n}$. Dar $a^{2n+1} = b^{2n+1} \Rightarrow a^{2n}a = b^{2n}b \Rightarrow a = b$, prin urmare f este injectivă. **(1 punct)**

Deoarece f este injectivă și G este mulțime finită, rezultă că f este bijectivă. **(1 punct)**

Cum $(G, \cdot)$ este grup abelian, conform a) rezultă că f este endomorfism al grupului G .

În concluzie, f este automorfism al grupului G . **(1 punct)**

Problema 3.

Avem $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} t g^{n-1} x (1 + t g^2 x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} t g^n x dx = I_1 + I_2$. Prima integrala devine prin

integrare prin parti $I_1 = e^{nx} \left(\frac{1}{n} t g^n x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_2 = \frac{1}{n} e^{\frac{n\pi}{4}} - I_2$ (3p). De aici $nI_n = e^{\frac{n\pi}{4}}$ și limita

de calculat se scrie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\pi}{4n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{4}$ (4p).

Problema 4

Pentru $x = y > 0$ obținem $F(2x) \leq 2F(x) \Rightarrow F(2x) - F(x) \leq F(x)$. Din teorema lui Lagrange rezultă că există $c_x \in (x, 2x)$ astfel încât $xf(c_x) \leq F(x)$. Deoarece f este crescătoare,

avem $f(x) \leq f(c_x)$, deci $xf(x) \leq F(x)$. În continuare deducem $\frac{xf(x) - F(x)}{x^2} \leq 0$,

adica $\left(\frac{F(x)}{x}\right)' \leq 0, \forall x \in (0, \infty)$ de unde rezulta ca functia $\frac{F(x)}{x}$

este descrescătoare pe $(0, \infty)$. **(4 puncte)**

Cum f este crescătoare rezultă că F este convexă și cum $F(0) = 0$ deducem că funcția

$\frac{F(x)}{x}$ este crescătoare pe $(0, \infty)$, prin urmare $\frac{F(x)}{x}$ este constanta pe $(0, \infty)$.

Avem $F(x) = kx \Rightarrow f(x) = k, \forall x \in (0, \infty)$. Cum f are primitive rezultă că f are proprietatea lui Darboux, deci $f(x) = k, \forall x \in [0, \infty)$. **(3 puncte)**

A doua soluție. Deoarece f are primitive rezultă că f are proprietatea lui Darboux și cum f este monotonă deducem că f este continuă. Atunci $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. **(1p)**

Fie $x, y \in [0, \infty)$. Inegalitatea din enunt se poate scrie

$$F(x+y) - F(x) \leq F(y) \Rightarrow \int_x^{x+y} f(t)dt \leq \int_0^y f(t)dt.$$

Cu schimbarea de variabila $u=t-x$ avem $\int_x^{x+y} f(t)dt = \int_0^y f(x+u)du$ si inegalitatea precedent devine

$$\int_0^y (f(t+x) - f(t))dt \leq 0. \textbf{(2p)}$$

Dar f crescătoare și $t \leq t+x$ implică $f(t+x) - f(t) \geq 0, \forall t \in [0, y]$, deci

$$\int_0^y (f(t+x) - f(t))dt \geq 0. \textbf{(2 puncte)}$$

Atunci $\int_0^y (f(t+x) - f(t))dt = 0$ și cum funcția de sub integrală este continuă și pozitivă,

rezultă că $f(t+x) - f(t) = 0, \forall t \in [0, y]$. Pentru $t = 0$ obținem $f(x) = f(0)$ și cum x a fost ales arbitrar, deduce ca f este functia constanta.

Se verifică imediat că funcțiile constante verifică cerințele problemei. **(2 puncte)**