



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 28 februarie 2016**

CLASA a XI – a

1. Se consideră determinantul $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{vmatrix}, n \in \mathbb{N}^*.$

a) Calculați D_4 și D_5 ;

b) Demonstrați că există o infinitate de valori $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $D_n < 0$.

2. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ și $x_{n+2} = 2x_{n+1} + \sqrt{x_{n+1}^2 - 3x_{n+1} \cdot x_n + 2 \cdot x_n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)(2x-1)}}{x}$ este crescătoare;

b) Arătați că șirul $(y_n)_{n \geq 1}$, $y_n = \frac{x_{n+1}}{2x_n}$ este convergent;

c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^{2016}}$.

Dana Heuberger

3. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_1 \in (1, 2)$ și $2x_{n+1} + x_n^2 = 2(x_n + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $x_n \in (1, 2)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) Considerând șirul convergent, calculați limita sa;

c) Demonstrați că șirul este convergent.

G.M. 1 / 2016 – 27175 (modificată)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Timp de lucru 3 ore.

Subiectele au fost propuse și selectate de către:

prof. Dana Heuberger, Colegiul Național „Gheorghe Șincai” Baia Mare.

prof. Gheorghe Sfara, Colegiul Național „Vasile Lucaciu” Baia Mare

prof. Cristian Heuberger, Colegiul Național „Gheorghe Șincai” Baia Mare.

SUCCES!