

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16.02.2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Se consideră funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \ln(\sin x)$ și F o primitivă a sa. Să se arate că există și este finită limita $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$.

Barem de corectare.

Deoarece $\int \ln(\sin x) dx = x \cdot \ln(\sin x) - \int \frac{x \cdot \cos x}{\sin x} dx$ (**2p**), considerăm funcția

$$g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \cos x}{\sin x}, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

care este continuă, deci admite primitive (**3p**).

Fie G o primitivă a funcției g , cu $F(x) = x \cdot \ln(\sin x) - G(x)$, pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci, deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} G(x) = G(0) \in \mathbb{R}$ și

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \cdot \ln(\sin x)) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot x \cos x \right) = 0,$$

obținem că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = -G(0) \in \mathbb{R}$ (**2p**).

PROBLEMA 2. Se consideră mulțimea $G = (-1, 1)$ și operația $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. Să se arate că $(G, *)$ este un grup comutativ și să se calculeze limita șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, unde $x_n = \underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $x \in G$.

Barem de corectare.

Demonstrarea faptului că $(G, *)$ este un grup comutativ (**3p**);

Demonstrarea faptului că $x_n = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}$ (**2p**);

Calculul limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (**2p**);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n - 1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n + 1} = -1, \text{ pentru } x \in (-1, 0);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \frac{1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n} = 1, \text{ pentru } x \in (0, 1);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \text{ pentru } x = 0.$$

PROBLEMA 3. Fie H_1 și H_2 două părți stabile finite a lui $\mathbb{C}^*$ în raport cu operația de înmulțire, având m , respectiv n elemente. Să se arate că dacă $(m, n) = 1$, atunci $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

Barem de corectare.

Deoarece H_1 și H_2 sunt părți stabile a lui $\mathbb{C}^*$, cu m , respectiv n elemente, rezultă că $H_1 = U_m = \{z \in \mathbb{C}^* | z^m = 1\}$ și $H_2 = U_n = \{z \in \mathbb{C}^* | z^n = 1\}$ **(3p)**.

Dacă $z \in H_1 \cap H_2 = U_m \cap U_n$, atunci există un $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ și un $k' \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ astfel încât $z = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m} = \cos \frac{2k'\pi}{n} + i \sin \frac{2k'\pi}{n} \Leftrightarrow \cos \frac{2k\pi}{m} = \cos \frac{2k'\pi}{n}$ și $\sin \frac{2k\pi}{m} = \sin \frac{2k'\pi}{n}$ **(2p)**. Așadar,

$$\sin \left(\frac{k\pi}{m} - \frac{k'\pi}{n} \right) \cdot \sin \left(\frac{k\pi}{m} + \frac{k'\pi}{n} \right) = \sin \left(\frac{k\pi}{m} - \frac{k'\pi}{n} \right) \cdot \cos \left(\frac{k\pi}{m} + \frac{k'\pi}{n} \right) = 0,$$

de unde obținem: $\sin \left(\frac{k}{m} - \frac{k'}{n} \right) \pi = 0 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{k'}{n} \xrightarrow{(m,n)=1} k = k' = 0 \Rightarrow z = 1$ **(2p)**.

PROBLEMA 4. Să se arate că dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție neconstantă și periodică, fără perioadă principală, atunci aceasta nu admite primitive și nu este integrabilă pe niciun interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Barem de corectare.

Fie F o primitivă a lui f și $(T_n)_{n \geq 0}$ un șir de perioade a lui f , convergent către 0.

Deoarece $F'(x + T_n) = f(x + T_n) = f(x) = F'(x)$, deducem că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $C_n \in \mathbb{R}$, astfel încât $F(x + T_n) - F(x) = C_n$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 0$ obținem $C_n = F(T_n) - F(0)$ **(2p)**, de unde

$$f(x) = F'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x + T_n) - F(x)}{T_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(T_n) - F(0)}{T_n} = F'(0) = f(0).$$

Contradicție cu faptul că f este neconstantă **(2p)**.

În continuare vom demonstra că f nu este integrabilă pe intervalul $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Funcția f nefiind constantă, rezultă că există $\beta_1, \beta_2 \in \text{Im } f$, astfel încât $\beta_1 \neq \beta_2$.

Dacă $(T_n)_{n \geq 0}$ este un șir de perioade a lui f , convergent către 0, atunci pentru orice interval de forma $[x, x + \varepsilon]$, unde $x \in \mathbb{R}$ și $\varepsilon > 0$, există un T_n astfel încât $[x, x + T_n] \subset [x, x + \varepsilon]$ și $\{\beta_1, \beta_2\} \subset f(x, x + T_n)$. Așadar, $\{\beta_1, \beta_2\} \subset f(x, x + \varepsilon)$.

Fie $\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n)$ un șir de diviziuni a intervalului $[a, b]$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| \rightarrow 0$. Putem alege sistemele de puncte intermediare $\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \dots, \xi_{k_n}^n)$ și $\xi^m = (\xi_1^m, \xi_2^m, \dots, \xi_{k_n}^m)$, astfel încât $f(\xi_1^n) = \dots = f(\xi_{k_n}^n) = \beta_1$ și $f(\xi_1^m) = \dots = f(\xi_{k_n}^m) = \beta_2$ **(2p)**.

Deoarece $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) \rightarrow (b - a)\beta_1$, iar $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^m) \rightarrow (b - a)\beta_2$, rezultă că funcția f nu este integrabilă pe $[a, b]$ **(1p)**.

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.