Clasa a XI-a — Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Dacă n este un număr natural, iterata de ordin n a unei funcţii $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţia

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n},$$

unde f^0 este identitatea. Determinaţi funcţiile continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care îndeplinesc simultan următoarele două condiţii:

(a) Funcţia $f^0 + f^1$ este crescătoare; şi

(b) Există un număr natural nenul m, astfel încât funcţia $f^0 + \cdots + f^m$ este descrescătoare.

Soluţie. Funcţiile cerute sunt de forma $f(x) = -x + c$, unde c este o constantă reală. Aceste funcţii verifică în mod evident condiţiile din enunţ.

Arătăm mai întâi că f este injectivă. Fie x şi y două numere reale, astfel încât $f(x) = f(y)$, şi fie $g_n = f^0 + \cdots + f^n$, $n \in \mathbb{N}$. Întrucât g_1 este crescătoare, g_m este descrescătoare, iar $g_1(x) - g_1(y) = x - y = g_m(x) - g_m(y)$, rezultă că $(x-y)^2 = (g_1(x) - g_1(y))(g_m(x) - g_m(y)) \leq 0$, deci $x = y$.

.... **2 puncte**

Întrucât f este injectivă şi continuă (proprietatea valorii intermediare (Darboux) este suficientă), f este strict monotonă, deci toate iteratele sale de ordin par, f^{2k}, sunt strict crescătoare.

.... **1 punct**

Funcţia g_1 fiind crescătoare, din paragraful precedent si relaţia

$$g_n = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n/2-1} g_1 \circ f^{2k} + f^n, & \text{dacă } n \text{ este par,} \\ \sum_{k=0}^{(n-1)/2} g_1 \circ f^{2k}, & \text{dacă } n \text{ este impar,} \end{cases}$$

rezultă că g_n este strict crescătoare, dacă n este par, şi crescătoare, dacă n este impar.

.... **2 puncte**

Funcţia g_m fiind descrescătoare, rezultă că m este impar şi g_m constantă. În fine, g_1 fiind crescătoare şi toate iteratele de ordin par ale lui f fiind (strict) crescătoare, deducem că g_1 este constantă, de unde rezultă concluzia.

.... **2 puncte**

Problema 2. Determinaţi funcţiile derivabile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţia $f \circ f = f$.

Soluţie. Funcţiile cerute sunt funcţiile constante şi identitatea, funcţii care verifică în mod evident condiţiile din enunţ.

Întrucât f este continuă, imaginea sa, $\{f(x)\colon x \in \mathbb{R}\}$, este un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Dacă I este un singleton, atunci f este constantă.

.... **1 punct**

Dacă I este nedegenerat, fie $a = \inf I < \sup I = b$, unde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Din condiţia din enunţ rezultă că restricţia lui f la intervalul deschis (a, b) este identitatea:

$$f(x) = x, \quad a < x < b. \tag{1}$$

. . . . **1 punct**

Vom arăta că $a = -\infty$ şi $b = +\infty$, i.e., $I = \mathbb{R}$ şi f este identitatea. Să presupunem că a este real. Continuitatea lui f în a şi (1) implică $f(a) = a$, deci

$$f'(a) = f'_d(a) = \lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a,\, x>a} \frac{x - a}{x - a} = 1. \tag{2}$$

Pe de altă parte, f are un minimum în a, deoarece $f(a) = a = \inf I = \inf\{f(x) \colon x \in \mathbb{R}\}$, deci, conform teoremei lui Fermat, $f'(a) = 0$, în contradicţie cu (2). Prin urmare, $a = -\infty$. În mod analog, $b = +\infty$.

. . . . **5 puncte**

Problema 3. Fie n un număr natural nenul şi A, B două matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătaţi că:

(a) Matricea $AB - BA$ este singulară; şi

(b) Dacă rangul matricei $A - B$ este 1, atunci matricele A şi B comută.

Soluţie. (a) Relaţia din enunţ este echivalentă cu fiecare dintre următoarele două relaţii:

$$(A - B)^2 = AB - BA, \tag{1}$$

$$A(A - B) = (A - B)B. \tag{2}$$

Să presupunem că matricea $AB - BA$ este nesingulară. Conform (1), şi $A - B$ este nesingulară, deci $B = (A - B)^{-1}A(A - B)$, conform (2). Aşadar, $A - B = A - (A - B)^{-1}A(A - B)$, de unde, $I_n = A(A - B)^{-1} - (A - B)^{-1}A$. Trecând la urmă, obţinem o contradicţie: $n = \operatorname{tr} I_n = \operatorname{tr}\big(A(A - B)^{-1} - (A - B)^{-1}A\big) = 0$. Prin urmare, matricea $AB - BA$ este singulară; în plus, din relaţia (1) rezultă că şi matricea $A - B$ este singulară.

. . . . **4 puncte**

(b) Reamintim că, dacă X este o matrice de rang 1 din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $X^2 = (\operatorname{tr} X)\, X$ — aceasta rezultă din faptul că fiecare linie a lui X este proporţională cu o linie nenulă a lui X.

Conform relaţiei (1) şi rezultatului amintit mai sus,

$$AB - BA = (A - B)^2 = (\operatorname{tr}(A - B))(A - B),$$

deci $0 = \operatorname{tr}(AB - BA) = (\operatorname{tr}(A - B))^2$, i.e., $\operatorname{tr}(A - B) = 0$. Prin urmare, $AB - BA = O_n$, i.e., $AB = BA$.

. . . . **3 puncte**

Problema 4. Fie A o matrice inversabilă din $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, astfel încât $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^* \neq 0$, unde A^* este adjuncta matricei A. Arătaţi că matricea $A^2 + I_4$ este singulară dacă şi numai dacă există o matrice nenulă B în $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, astfel încât $AB = -BA$.

Soluţie. Arătăm mai întâi că, dacă A este o matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel încât $A^2 + I_n$ este singulară, atunci există o matrice nenulă B în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel încât $AB = -BA$.

Întrucât $A^2 + I_n$ este singulară, i este o valoare proprie a lui A, iar $-$i este o valoare proprie a transpusei A^τ. Există deci doi vectori nenuli $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, astfel încât $A\mathbf{x} = \mathrm{i}\mathbf{x}$ şi $A^\tau\mathbf{y} = -\mathrm{i}\mathbf{y}$. Întrucât $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ sunt nenuli, $B = \mathbf{x}\mathbf{y}^\tau$ este o matrice nenulă din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Matricele A şi B anticomută:

$$AB = A\mathbf{x}\mathbf{y}^\tau = \mathrm{i}\mathbf{x}\mathbf{y}^\tau = -\mathbf{x}(-\mathrm{i}\mathbf{y})^\tau = -\mathbf{x}\left(A^\tau\mathbf{y}\right)^\tau = -\mathbf{x}\mathbf{y}^\tau A = -BA.$$

Trecând la conjugate şi ţinând cont de faptul că A este în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, rezultă că şi conjugata $\bar{B}$ a lui B anticomută cu A. Deci orice combinaţie liniară cu coeficienţi complecşi a matricelor B şi $\bar{B}$ anticomută cu A. Prin urmare, B sau $\mathrm{i}(B-\bar{B})$ este o matrice nenulă din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care anticomută cu A. În particular, am demonstrat una dintre implicaţiile problemei.

.... **4 puncte**

Arătăm acum că, în condiţiile din enunţ, este adevărată şi reciproca. Fie B o matrice nenulă din $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, care anticomută cu A. Atunci

$$A^kB = (-1)^kBA^k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Considerăm polinomul caracteristic f al matricei A,

$$f = \lambda^4 - (\operatorname{tr} A)\lambda^3 + a\lambda^2 - (\operatorname{tr} A^*)\lambda + \det A = \lambda^4 - (\operatorname{tr} A)\lambda^3 + a\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A,$$

unde a este un număr real; cea de a doua expresie a lui f rezultă din ipoteza $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^*$.

Conform teoremei Hamilton-Cayley, $f(A) = O_4$. Ţinând cont de $(*)$, obţinem succesiv:

$$\begin{aligned} O_4 = f(A)B &= B\left(A^4 + (\operatorname{tr} A)A^3 + aA^2 + (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I_4\right) \\ &= B\left(f(A) + 2(\operatorname{tr} A)(A^2+I_4)A\right) = 2(\operatorname{tr} A)B(A^2+I_4)A. \end{aligned}$$

Întrucât $\operatorname{tr} A \neq 0$, iar A este inversabilă, rezultă că $B(A^2+I_4) = O_4$. Matricea B fiind nenulă, conchidem că A^2+I_4 este singulară.

.... **3 puncte**