

BAREM CLASA A IX-A

SUBIECTUL I

$$\cdot \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} \geq \frac{(x+y)^2}{y+z} \text{ (C.B.S) (2p)}$$

$$\text{Arătam că } \frac{(x+y)^2}{y+z} \geq 4(x-z) \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4(y+z)(x-z) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4(xy - yz + xz - z^2) \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy - 4yz + 4xz - 4z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4yz - 4xz \geq 0 \text{ (3p)}$$

$$(x - y - 2z)^2 \geq 0 \text{ (Adevărat) (2p)}$$

SUBIECTUL II

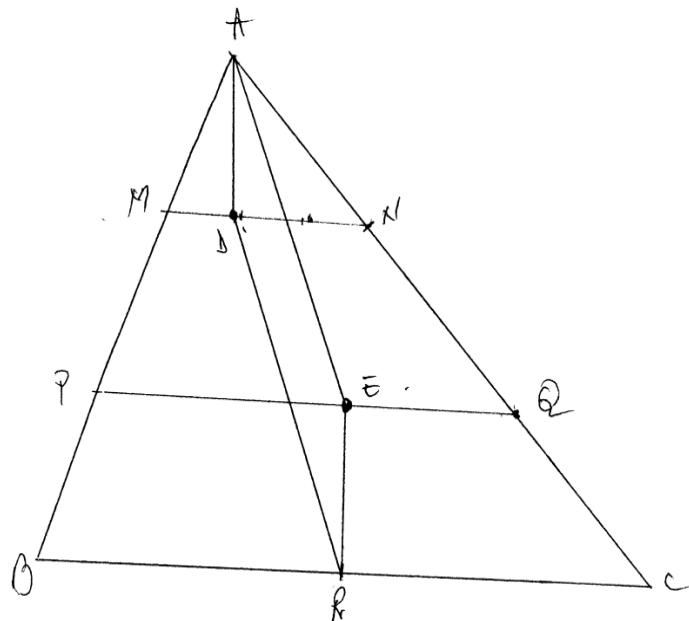
$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \text{ (1p)}$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{2}{9} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ (1p)}$$

Fie k raportul în care punctul E împarte segmentul PQ .

$$\text{Avem } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{1-k} \cdot \overrightarrow{AP} - \frac{k}{1-k} \cdot \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3(1-k)} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{2k}{3(1-k)} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ (2p)}$$

$$\text{ADRE} = \text{paralelogram} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AR} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3(1-k)}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{9} - \frac{2k}{3(1-k)}\right) \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow k = -\frac{7}{5} \Leftrightarrow \overrightarrow{EP} = -\frac{7}{5} \overrightarrow{EQ} \Leftrightarrow \frac{EP}{EQ} = \frac{7}{5} \text{ (3p)}$$



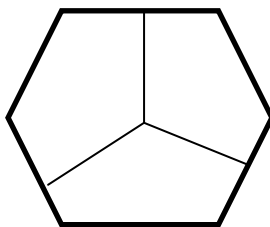
SUBIECTUL III

Vom justifica proprietatea prin inducție matematică (de pas 3)

P(5) Adevărat (evident)

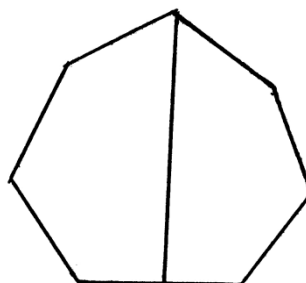
P(6) Adevărat

(1p)



P(7) Adevărat

(1p)



Presupunem acum că $n \geq 8$ și că orice poligon convex cu m laturi cu $8 \leq m < n$ se poate descompune în pentagoane.

Fie $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ – un poligon cu n laturi.

Delimităm pentagonul $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ (prin construcția diagonalei $A_1 A_5$ – sau pierdut astfel 4 laturi din poligonul inițial și s-a câștigat una, $A_1 A_5$).

Deci poligonul $A_1 A_5 A_6 \dots A_n$ are $n-3$ laturi.

Dar $5 \leq n - 3 < n$ deci conform presupunerii făcute acesta ($A_1 A_5 A_6 \dots A_n$) poate fi descompus în pentagoane convexe. (5p)

SUBIECTUL IV

a) Cum $a_1, a_2 \in N \Rightarrow r = a_2 - a_1 \in N$., presupunem $a_k = m^2$ atunci

$$a_{k+p} = a_k + pr = m^2 + pr. (2p)$$

Cum $r \in N^*$ dacă luăm $p = 2m + r$ rezultă $a_{k+p} = m^2 + r(2m + r) = (m + r)^2$ și apoi repetăm raționamentul. (2p)

b) cunoașterea condițiilor de progresie (1p); demonstrația completă (2p)