



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 6 martie 2022

CLASA a XII-a – enunțuri

Timp de lucru 180 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Fie operația $\perp$ definită prin $x \perp y = xy + 6x + 6y + 30$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Această operație nu este lege de compoziție pe:

- A. $\mathbb{R}$.
- B. $\mathbb{R} \setminus \{-6\}$.
- C. $(-6, \infty)$.
- D. $(-\infty, -6)$.
- E. $\mathbb{Q}$.

2. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (ax + b)e^x$ este o primitivă a funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (2x + 3)e^x$ dacă

- A. $a = 3, b = 2$.
- B. $a = 2, b = 1$.
- C. $a = 2, b = 3$.
- D. $a = 2, b = 0$.
- E. $a = 2, b = -1$.

3. Fie legea asociativă $*$ definită pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ prin $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$. Atunci $\frac{9}{2} * \frac{14}{3} * \frac{19}{4} * \frac{24}{5} * \frac{29}{6}$ este egal cu

- A. $\frac{23}{6}$.
- B. $\frac{25}{6}$.
- C. $\frac{1}{6}$.
- D. $\frac{31}{6}$.
- E. 4.

4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă astfel încât $f'(0) = -1$. Notăm cu F o primitivă a lui f . Atunci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) + F(-x) - 2F(0)}{x^2}$ este egală cu:

- A. 0.
- B. 1.
- C. -1.
- D. 2.
- E. -2.

5. Pe $\mathbb{Z}_8$ definim legea $\circ$ prin $a \circ b = ab + \widehat{3}a + \widehat{3}b$, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_8$. Numărul soluțiilor ecuației $x \circ x = \widehat{7}$ este

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 4.
- E. 8.

6. Fie funcția $f : [-\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^x (2^t - 1) t dt$. Atunci:

- A. $x = 0$ este punct de minim al funcției f .
- B. $x = 0$ este punct de maxim al funcției f .
- C. f este descrescătoare pe $[-\frac{1}{2}, \infty)$.
- D. f este crescătoare pe $[-\frac{1}{2}, \infty)$.
- E. Toate răspunsurile anterioare sunt false.

7. Pe $(1, \infty)$ definim legea de compoziție $\perp$ prin $u \perp v = u \cdot v + \sqrt{u^2 - 1} \cdot \sqrt{v^2 - 1}$, pentru orice $u, v \in (1, \infty)$. Valoarea numărului real α , pentru care $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} (x \perp x^2 - \alpha x^3)$ există și este finită, este egală cu

- A. 1.
- B. 2.
- C. 4.
- D. 6.
- E. Alt răspuns.

8. Fie $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ și $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, unde $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 : D \rightarrow D$ sunt funcțiile definite prin $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_3(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $f_4(x) = 1 - x$, $f_5(x) = \frac{1}{x}$, $f_6(x) = \frac{x}{x-1}$, pentru orice $x \in D$. Dacă $\circ$ este operația de compunere a funcțiilor, care dintre următoarele enunțuri este fals?

- A. $\mathcal{F}$ este parte stabilă în raport cu operația de compunere a funcțiilor.
- B. $(\mathcal{F}, \circ)$ este un grup necomutativ.
- C. $(\mathcal{F}, \circ)$ este un grup comutativ.
- D. $(\mathcal{F}, \circ)$ este un grup care are 6 subgrupuri.
- E. $(\mathcal{F}, \circ)$ este un grup neciclic.

9. Pe $\mathbb{R}$ definim legea asociativă $*$ prin $a * b = 2(a - 3)(b - 3) + 3$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$. Pentru un număr real α definim șirul $(x_n)_{n \geq 2}$ prin relația $x_n = \underbrace{\alpha * \alpha * \dots * \alpha}_{n \text{ de } \alpha}$. Mulțimea tuturor valorilor

posibile ale numărului α pentru care șirul $(x_n)_{n \geq 2}$ este mărginit este:

- A. $\emptyset$.
- B. $\{3\}$.
- C. $\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\}$.
- D. $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$.
- E. $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$.

10. Valoarea integralei $I = \int_0^1 \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right) dx$ este

- A. 0.
- B. 1.
- C. $\frac{1}{2} \ln(2)$.
- D. $\ln(1 + \sqrt{2})$.
- E. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln(1 + \sqrt{2})$.

11. Cel mai mic număr natural nenul n , pentru care $\widehat{1} \cdot \widehat{4} \cdot \widehat{7} \cdot \dots \cdot \widehat{(3n+1)} = \widehat{0}$ în $\mathbb{Z}_{2021}$, este
- A. 1347.
 B. 674.
 C. 673.
 D. 31.
 E. 67.

12. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_0^1 (x - x^2)^n dx}$ este
- A. 0.
 B. 1.
 C. nu există.
 D. $\frac{1}{4}$.
 E. $\frac{1}{2}$.

13. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e , $G \neq \{e\}$, iar $f : G \rightarrow G$ un endomorfism al grupului G cu proprietatea că $f(x^2 y^3) = x^3 y^2$ pentru orice elemente $x, y \in G$. Care dintre următoarele afirmații nu este adevărată?
- A. Grupul G este comutativ.
 B. G conține un subgrup cu 12 elemente.
 C. $f(x) = x^{-1}$ pentru orice element $x \in G$.
 D. G conține un subgrup cu 5 elemente.
 E. $x^5 = e$ pentru orice element $x \in G$.

14. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și crescătoare. Fie F o primitivă a lui f care admite asimptotă orizontală la $+\infty$. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - F(n)$.

Fie enunțurile:

E1: Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este monoton.

E2: Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.

E3: Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Numărul de enunțuri adevărate este egal cu

- A. 1.
 B. 2.
 C. 3.
 D. 0.
 E. Nu poate fi precizat cu exactitate.

15. Numărul total de valori posibile ale elementului $a \in \mathbb{Z}_{42}$, pentru care funcția $f : \mathbb{Z}_{42} \rightarrow \mathbb{Z}_{42}$, $f(x) = ax$ nu este injectivă, este egal cu

- A. 4.
 B. 18.
 C. 30.
 D. 24.
 E. 14.

16. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ definim şirul $(I_n)_{n \geq 1}$ prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$. Valoarea lui n , pentru care are loc egalitatea $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{2022}$, este

- A. 2019.
- B. 2020.
- C. 2021.
- D. 2022.
- E. 2023.

17. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e . Fie $H \neq G$ o submulţime proprie nevidă a lui G cu proprietatea că oricare ar fi $a \in H$ şi $b \in G \setminus H$ avem $ab \in H$. Considerăm enunţurile:

E1: Pentru orice $u, v \in H$ avem $uv \in H$.

E2: Pentru orice $u, v \in G \setminus H$ avem $uv \in G \setminus H$.

E3: $e \in G \setminus H$.

E4: Pentru orice $x \in H$ avem $x^{-1} \in H$.

Numărul de enunţuri adevărate este egal cu:

- A. 4.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 1.
- E. 0.

18. Mulţimea tuturor valorilor posibile ale numărului real a pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$, este:

- A. $\{\frac{1}{2}\}$.
- B. $\{-1\}$.
- C. $\{0\}$.
- D. $[0, -1]$.
- E. $\emptyset$.

19. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e . Fie $a, b \in G$, astfel încât $aba = b$ şi $bab = a$. Care dintre următoarele egalităţi nu rezultă din cele două de mai sus?

- A. $a^2 = b^2$.
- B. $a^4 = e$.
- C. $bab^{-1} = a^{-1}$.
- D. $ab = ba$.
- E. $ab = b^{-1}a$.

20. Cel mai mic număr $\alpha > 0$ pentru care valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \int_n^{n^2} \sqrt{x^2 + 1} dx$ este finită este

- A. 1.
- B. 2.
- C. e .
- D. 4.
- E. 2π .

21. Se consideră următoarele enunțuri despre grupuri:

- E1: Dacă toate elementele unui grup finit au ordin impar, atunci grupul are ordin impar.
E2: Dacă toate subgrupurile proprii ale unui grup sunt comutative, atunci grupul este comutativ.
E3: Dacă toate subgrupurile proprii ale unui grup sunt finite, atunci grupul este finit.
E4: Dacă un grup are un număr finit de subgrupuri, atunci grupul este finit.

Numărul de enunțuri adevărate este egal cu:

- A. 1.
B. 3.
C. 0.
D. 2.
E. 4.

22. Valoarea integralei $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + e^x} dx$ este

- A. $2e^{\frac{\pi}{2}}$.
B. $e^{\frac{\pi}{2}}$.
C. π .
D. 0.
E. 1.

23. Fie $\mathbb{P}$ mulțimea numerelor naturale prime, iar $A = \mathbb{P} \cup (-\mathbb{P})$. Considerăm enunțurile:

- E1: Adunarea numerelor nu este lege de compoziție pe A .
E2: Înmulțirea numerelor nu este lege de compoziție pe A .
E3: Există o infinitate de operații binare $*$ care pot fi legi de compoziție pe A .
E4: Există cel puțin o operație $*$ care definește o structură de grup abelian pe A .

Numărul de enunțuri adevărate este egal cu:

- A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.
E. 4.

24. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ o funcție care admite primitive. Considerăm enunțurile:

- E1: Există funcții $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care nu au proprietatea lui Darboux, iar $f \cdot g$ să admită primitive.
E2: Funcția $f \cdot g$ admite primitive pentru orice funcție derivabilă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care are derivata continuă.
E3: Funcția $f \cdot g$ admite primitive pentru orice funcție continuă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
E4: Funcția $f \cdot g$ admite primitive pentru orice funcție derivabilă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care are derivata mărginită.

Numărul de enunțuri adevărate este egal cu:

- A. 3.
B. 1.
C. 0.
D. 2.
E. 4.