

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16.02.2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Fie $x, y, z > 0$ numere reale cu proprietatea $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Să se demonstreze inegalitățile următoare:

a) $x + y + z \geq 3$;

b) $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \geq 12$.

Barem de corectare.

a) Inegalitatea $\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3}$ implică inegalitatea cerută **(2p)**.

b) Deoarece $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \geq 3$ **(3p)**, obținem $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(x+y+z) + 3 \geq 12$ **(2p)**.

PROBLEMA 2. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația pozitivă r și primul termen $a_1 \geq \frac{1}{2}$. Determinați partea întreagă a numărului

$$A = \sqrt{1 + \frac{r}{a_1 a_2}} + \sqrt{1 + \frac{r}{a_2 a_3}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{r}{a_n a_{n+1}}}, \quad n \geq 2.$$

Barem de corectare.

Evident, $A \geq n$ **(2p)**. Deoarece $\sqrt{1+x} \leq \frac{2+x}{2} = 1 + \frac{x}{2}$, $\forall x \geq -1$ **(1p)**, avem

$$\begin{aligned} A &\leq n + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a_1 a_2} + \frac{r}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{r}{a_n a_{n+1}} \right) = \\ &= n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \\ &= n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) < n + \frac{1}{2a_1} \leq n + 1 \quad \textbf{(3p)}. \end{aligned}$$

Așadar, $[A] = n$ **(1p)**.

PROBLEMA 3. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$ și $C_1 \in (AB)$, astfel încât AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt concurente. Cercul circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ intersectează (a doua oară) BC , CA și AB , respectiv, în punctele A_2 , B_2 și C_2 . Arătați că:

- a) $AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2$;
- b) dreptele AA_2 , BB_2 , CC_2 sunt concurente.

Barem de corectare.

- a) Rezultă din asemănarea triunghiurilor AC_1B_2 și AB_1C_2 (2p).
- b) Din Teorema lui Ceva, avem $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$ (2p). Deoarece $AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2$,
 $BA_1 \cdot BA_2 = BC_1 \cdot BC_2$ și $CB_1 \cdot CB_2 = CA_1 \cdot CA_2$, rezultă că $\frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{AC_2}{C_2B} = 1$ (2p).
 Aplicăm reciproca Teoremei lui Ceva (1p).

PROBLEMA 4. În patrulaterul convex $ABCD$ se notează cu G centrul de greutate al triunghiului BCD și cu H ortocentrul triunghiului ACD . Să se demonstreze că punctele A, B, G, H reprezintă, în această ordine, vârfurile unui paralelogram, dacă și numai dacă G este centrul cercului circumscris triunghiului ACD .

Barem de corectare.

Fie O centrul cercului circumscris $\triangle ACD$.

Au loc relațiile $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$ (2p) și $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$ (2p).

Astfel, $ABGH$ este paralelogram dacă și numai dacă

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} - 2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DH} + 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} \quad (3p). \end{aligned}$$

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.