

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a IX-a M₁

Problema 1

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[\frac{4x+4}{4x-5} \right] = \frac{2x-1}{3}$.

Problema 2

a) Arătați că $4x^3 + 4x^2 + 2 \geq 7x$, $\forall x \in [-2, \infty)$

b) Determinați valorile reale ale lui k , pentru care: $a^3 + b^3 + c^3 + a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{2} \geq k(a+b+c)$,
 $\forall a, b, c \in [-2, \infty)$.

Problema 3

Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 6$, un pătrat se poate împărți în exact n pătrate (nu neapărat de aceeași dimensiune – în figura alăturată aveți un exemplu pentru $n = 10$).

1	2	5	
3	4		
6		7	8
		9	10

Problema 4

a) Arătați că, dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci, pentru orice punct O din planul triunghiului avem $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

b) Determinați o relație între numerele reale a, b astfel încât punctele $A(1,1)$, $B(a,b)$ și $C(a+1,b+1)$ să fie vârfurile unui triunghi.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică**Etapă locală - 15.02.2014****Clasa a X-a M₁****Problema 1**

Stabiliți valoarea de adevăr a următoarei propoziții: “Există numere iraționale care ridicate la puterea număr irațional să dea număr rațional”.

Problema 2

Fie $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ și $z \in \mathbb{C}$. Demonstrați că $(z-1)^2 + (z-\varepsilon)^2 + (z-\bar{\varepsilon})^2 = 3z^2$.

Problema 3

Să se demonstreze că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci $\lg^2\left(\frac{ab}{c}\right) + \lg^2\left(\frac{bc}{a}\right) + \lg^2\left(\frac{ca}{b}\right) \geq \lg \frac{abc}{\sqrt[4]{1000}}$.

Problema 4

Să se determine $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

limpiada Națională de Matematică**Etapă locală - 15.02.2014****Clasa a XI-a M₁****Problema 1**

Se consideră determinantul $f(x) = \begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{2a} \end{vmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

- a) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$, ecuația $f(x) = 0$ are soluții reale?
- b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x) = 0$ are toate soluțiile numere reale strict negative.

Problema 2

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $A, B \in M_n(\mathbb{Q})$ două matrice cu proprietatea că $A + B = AB$. Arătați că pentru orice $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, proprietățile următoare sunt echivalente:

- 1) $A + B + B^2 + \dots + B^{k-1} = O_n$.
- 2) $B^k = O_n$.

Problema 3

Să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\sum_{k=1}^n \frac{k^2 - k + 1}{k^4 + k}} \right)^{n^2+1}$.

Problema 4

Să se determine în funcție de $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1})$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică**Etapă locală - 15.02.2014****Clasa a XII-a M₁****Problema 1**

Să se determine primitivele funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Problema 2

- a) Să se arate că $\int \cos(x^3 + 1) dx = x \cos(x^3 + 1) + 3 \int x^3 \sin(x^3 + 1) dx$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se calculeze $\int (4 + 9x^6) \cos(x^3 + 1) dx$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Problema 3

Pe $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, $(\forall) x, y \in \mathbb{Z}$. Să se determine restul împărțirii lui $\underbrace{5 * 5 * \dots * 5}_{\text{de 2014 ori}}$ la 3^{2014} .

Problema 4

Se consideră mulțimea $G = \left\{ A_x = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 5x^2 - 2x \\ 0 & 1 & 5x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset M_3(\mathbb{R})$.

- a) Să se arate că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Să se arate că $(G, \cdot)$ formează o structură de grup.
- c) Să se arate că $f: G \rightarrow \mathbb{R}, f(A_x) = x$ este un izomorfism de la $(G, \cdot)$ la $(\mathbb{R}, +)$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică**Etapă locală - 15.02.2014****Clasa a IX-a M₂****Problema 1**

Arătați că: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$, $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$ și $(\forall) x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Problema 2

La o fabrică de încălțăminte s-au fabricat în luna martie 2013, 540 perechi de pantofi, la fel și în aprilie, iar la fiecare două luni producția se dublează.

- a) Câte perechi de pantofi se fabrică până la sfârșitul anului (*începând cu luna martie*)?
- b) În ce lună/an producția va fi de 276480 de pantofi?

Problema 3

Fie $ABCD$ un paralelogram. Să se arate că pentru orice punct M din planul paralelogramului avem relația $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Problema 4

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

a). Să se verifice că $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

b). Să se calculeze S_5 .

c). Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se arate că $S_n = \frac{n}{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

d). Să se găsească cel mai mare număr natural nenul n , cu proprietatea că $S_n < \frac{11}{12}$.

e). Să se găsească cel mai mic număr natural nenul n , cu proprietatea că $S_n > \frac{111}{112}$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică**Etapă locală - 15.02.2014****Clasa a X-a M₂****Problema 1**

Aflați $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} = a + b\sqrt{5}$.

Problema 2

Arătați că expresia $E = \frac{\log_2 x^2 + \log_2 x^3 + \dots + \log_2 x^{2014}}{\log_7 x^3 + \log_7 x^4 + \dots + \log_2 x^{2015}}$ este independentă de x , pentru orice $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Problema 3

Să se determine suma valorilor lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care are sens expresia $E(x) = \log_{x^2-3x+2}(16-x^2)$.

Problema 4

Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $z + |z| = 8 + 4i$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică**Etapă locală - 15.02.2014****Clasa a XI-a M₂****Problema 1**

Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$. Să se determine domeniul maxim de definiție și asimptotele la graficul funcției.

Problema 2

Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Problema 3

Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{\operatorname{tg}(x^3 - 1)} \cdot \frac{e^{x^2 - 1} - 1}{x^4 - 1}$.

Problema 4

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- a) Să se calculeze $\det(A + 3I_3)$.
- b) Să se verifice dacă $A^5 + 4A = O_3$.
- c) Să se calculeze $A + A^5 + A^9 + \dots + A^{2013}$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică**Etapă locală - 15.02.2014****Clasa a XII-a M₂****Problema 1**

Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție asociativă, $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21, (\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Arătați că $x * y = 2(x - 3)(y - 3) + 3, (\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Calculați $1 * 2 * \dots * 2014$.
- c) Există $a, b \in \mathbb{R} / \mathbb{Q}$ astfel încât $a * b \in \mathbb{N}$? Justificați răspunsul.

Problema 2

Să se calculeze integralele $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ și $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Problema 3

Fie $f, F : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, $F(x) = (ax+b)\sqrt{x-1}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât F este o primitivă pentru f .

Problema 4

Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$.

- a) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup.
- b) Arătați că $f : \mathbb{Z} \rightarrow G, f(x) = A(x)$ este un izomorfism de la $(\mathbb{Z}, +)$ la $(G, \cdot)$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.