INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN V A S L U I
TELEFON: 0235/311928
FAX: 0235/311715
e-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro
website : http://isj.vs.edu.ro
Nr............ din......................

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA LOCALĂ

16 februarie 2014-CLASA a VIII-a

1. a) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia:
$$\sqrt{6^2+8^2}+\sqrt{(1+3)^2}-|x-2014|=\sqrt{3^{20}}-3^{10}$$
b) Fie a şi b două numere reale pozitive pentru care avem $a+b=1$. Dovediţi că: $a^a b^b + a^b b^a \le 1$

2. Fie a,b,c numere reale pozitive astfel încât $abc=2013$. Arătaţi că
$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\le\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2013}}.$$
(G.M. 9/2013, E: 14545)

3. Se dau punctele necoplanare A, B, C, D. Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor (AB), (BC), (CD) şi (DA). Să se arate că:
a) patrulaterul MNPQ este paralelogram;
b) planele (APB), (CDM), (BCQ), (DAN) au un punct comun.

4. Fie ABCD un tetraedru pentru care avem AB⊥AC, AB⊥AD, AC⊥AD şi ariile triunghiurilor ABC, ACD, ADB sunt egale cu x, y, z. Dovediţi că:
   a) dreapta AD este perpendiculară pe planul (ABC)
   b) Dacă AB = b, AC = c şi AD = d, atunci $b^2c^2d^2=8xyz$.
   c) Determinaţi în funcţie de x, y, z aria triunghiului BCD.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.

BAREM DE NOTARE – clasa a VIII-a

Sub.		**Puncte**	
1.	**a)**	**2p**	Calculează şi obţine $10+4-\lvert x-2014\rvert=0$, $\lvert x-2014\rvert=14$
		1p	Finalizează şi obţine $x\in\{2000,2028\}$
7p	**b)**	**1p**	Scrie $1=a+b=a^{a+b}+b^{a+b}=a^a a^b+b^a b^b$
		2p	Descompune diferenţa $1-a^a b^b-a^b b^a=(a^b-b^b)(a^a-b^a)$ unde înlocuieşte pe $1=a^a a^b+b^a b^b$
		1p	Dacă $a\le b$ ambele paranteze sunt ≤ 0 deci produsul lor este nenegativ. Dacă $a\ge b$ ambele paranteze sunt ≥ 0 deci produsul lor este nenegativ. Rezultă ceea ce trebuia dovedit.
2.		**1p**	$\sqrt{2013}=\sqrt{abc}$
7p		**2p**	Avem de arătat $\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\le\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2013}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}$ $=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{abc}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{abc}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}=\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$
		3p	Arătăm că $\frac{b+c}{b^2+c^2}\le\frac{1}{\sqrt{bc}}\leftrightarrow b\sqrt{bc}+c\sqrt{bc}\le b^2+c^2$ şi încă 2 relaţii similare Avem $b\sqrt{bc}=\sqrt{b^2\cdot bc}\le\frac{b^2+bc}{2}$ (inegalitatea mediilor) şi $c\sqrt{bc}=\sqrt{c^2\cdot bc}\le\frac{c^2+bc}{2}$ pe care le adunăm şi avem $b\sqrt{bc}+c\sqrt{bc}\le\frac{b^2+c^2+2bc}{2}\le b^2+c^2$ ultima parte fiind adevărată
		1p	Adună relaţiile şi finalizează
3.	**a)**	**1p**	MQ linie mijlocie, paralelă cu BD şi jumătate din BD
	3p	**1p**	NP linie mijlocie, paralelă cu BD şi jumătate din BD
7p		**1p**	Finalizează
	b)	**1p**	$(APB)\cap(CDM)=MP$
		1p	$(BCQ)\cap(DAN)=NQ$
	4p	**2p**	Cele două drepte au un punct comun, punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului MNPQ. Finalizează.

4. **7p**	**a)** **1p**	**1p**	$AD \perp AB,\ AD \perp AC \rightarrow AD \perp (ABC)$
	b) **2p**	**1p**	Exprimă ariile celor 3 triunghiuri $x = \frac{bc}{2},\ y = \frac{cd}{2},\ z = \frac{bd}{2}$
		1p	Dovedeşte relaţia
	c) **4p**	**1p**	Aplică teorema celor 3 perpendiculare pentru înălţimea BP a triunghiului BCD
		1p	Calculează $BP = \frac{\sqrt{b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$
		1p	Află aria triunghiului BCD $A = \frac{\sqrt{b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2}}{2}$
		1p	Exprimă funcţie de x, y, z aria triunghiului BCD $A = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Orice altă metodă care conduce la soluţie primeşte punctaj maxim.