

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală - 15.02.2014

Clasa a VII-a

1. Calculați:

a) $(-\sqrt{288} + \sqrt{98}) - (\sqrt{18} - \sqrt{242})$

b) $|x| + 2x + 1 + |x - 1|$, dacă $x < 0$

c) partea întreagă a numărului $A\sqrt{2014}$, unde

$$A = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{\sqrt{2014} - \sqrt{2013}}{\sqrt{2013} \cdot \sqrt{2014}}$$

2. a) Dacă $0 < a < b$ și $x > 0$ atunci, $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$

b) Să se arate că: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2013}{2014} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2014}{2015}$

3. În triunghiul ABC , $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$. Fie M mijlocul laturii (AC) . Paralela prin C la AB intersectează BM în N .

a) Arătați că $ABCN$ este paralelogram.

b) Dacă P este simetricul lui B față de A și $PC \cap AN = \{S\}$, arătați că $BS \perp PC$

4. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $AD \perp AC$. Notăm cu N proiecția lui C pe BD și cu P simetricul lui B față de AC . Demonstrați că $AN \perp NP$.

GM 2013

Propunător: profesor Pătrașcu Enache, Colegiul Național Unirea Focșani

SUCCES!

NOTĂ:

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală - 15.02.2014

Clasa a VII-a

Soluții

1. a)	$-12\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 11\sqrt{2} =$
	$= 3\sqrt{2}$
b)	$-x + 2x + 1 - x + 1 =$
	$= 2$
c)	$A = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2013}} - \frac{1}{\sqrt{2014}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2014}}$
	$A\sqrt{2014} = \sqrt{2014} - 1 \Rightarrow \lfloor A\sqrt{2014} \rfloor = 43$
2. a)	$a(b+x) < b(a+x) \Leftrightarrow$
	$ax < bx \Leftrightarrow x(a-b) < 0$, adevărat
b)	$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \dots, \frac{2013}{2014} < \frac{2014}{2015} \Rightarrow$
	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2013}{2014} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2014}{2015}$
3. a)	$\triangle AMB \cong \triangle CMN \text{ (C.U)} \Rightarrow MB = MN$
	Din $MB = MN$ și $MA = MC$ rezultă ABCN paralelogram
b)	BPC triunghi echilateral, (1)
	S mijlocul lui (PC), (2)
	(1), (2) $\Rightarrow BS \perp PC$
4.	Fie $AC \cap BD = \{O\}$
	$\triangle ONC \sim \triangle OCB \Rightarrow \frac{ON}{OA} = \frac{CN}{CP}$
	$m(\sphericalangle AON) = m(\sphericalangle NCP) = 90^\circ + m(\sphericalangle B) \Rightarrow$
	$\triangle ONA \sim \triangle CNP \Rightarrow \sphericalangle ONA \equiv \sphericalangle CNP$
	Deci
	$m(\sphericalangle ANP) = m(\sphericalangle ONA) + m(\sphericalangle ONP) = m(\sphericalangle CNP) + m(\sphericalangle ONP) = m(\sphericalangle ONC) = 90^\circ$
	$AN \perp NP$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Faza locală - 15.02.2014
Clasa a VII-a
Bareme

1. a)	$-12\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 11\sqrt{2} =$	2p
	$= 3\sqrt{2}$	1p
b)	$-x + 2x + 1 - x + 1 =$	1p
	$= 2$	1p
c)	$A = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2013}} - \frac{1}{\sqrt{2014}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2014}}$	1p
	$A\sqrt{2014} = \sqrt{2014} - 1 \Rightarrow \lfloor A\sqrt{2014} \rfloor = 43$	1p
2. a)	$a(b+x) < b(a+x) \Leftrightarrow$	2p
	$ax < bx \Leftrightarrow x(a-b) < 0$, adevărat	2p
b)	$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \dots, \frac{2013}{2014} < \frac{2014}{2015} \Rightarrow$	2p
	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2013}{2014} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2014}{2015}$	1p
3. a)	$\triangle AMB \equiv \triangle CMN (C.U) \Rightarrow MB = MN$	2p
	Din $MB = MN$ și $MA = MC$ rezultă $ABCN$ paralelogram	2p
b)	BPC triunghi echilateral, (1)	1p
	S mijlocul lui (PC) , (2)	1p
	$(1), (2) \Rightarrow BS \perp PC$	1p
4.	Fie $AC \cap BD = \{O\}$	
	$\triangle ONC \sim \triangle OCB \Rightarrow \frac{ON}{OA} = \frac{CN}{CP}$	2p
	$m(\sphericalangle AON) = m(\sphericalangle NCP) = 90^\circ + m(\sphericalangle B) \Rightarrow$	2p
	$\triangle ONA \sim \triangle CNP \Rightarrow \sphericalangle ONA \equiv \sphericalangle CNP$	1p
	Deci $m(\sphericalangle ANP) = m(\sphericalangle ONA) + m(\sphericalangle ONP) = m(\sphericalangle CNP) + m(\sphericalangle ONP) = m(\sphericalangle ONC) = 90^\circ$	
	$AN \perp NP$	2p