

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2025

CLASA a XI -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o matrice cu $\text{Tr}(A) = 2$ și $\det(A) = 3$. Demonstrați că

$$2 \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 4.$$

Soluție:

Utilizând relația Hamilton-Cayley, avem că $A^2 - \text{Tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$, deci $A^2 - 2A + 3I_2 = O_2$, de unde rezultă că $A^2 + 3I_2 = 2A$. Trecând la determinant obținem că $\det(A^2 + 3I_2) = \det(2A) = 2^2 \cdot \det(A) = 12$.

Pe de altă parte, din $A^2 - 2A + 3I_2 = O_2$, avem că $A^2 + I_2 = 2A - 2I_2 = 2(A - I_2)$, deci $\det(A^2 + I_2) = \det(2(A - I_2)) = 4 \cdot \det(A - I_2)$.

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci $A - I_2 = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$, iar $\det(A - I_2) = (a-1)(d-1) - bc = ad - bc - (a+d) + 1 = \det(A) - \text{Tr}(A) + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$.

Deducem că $\det(A^2 + I_2) = 4 \cdot \det(A - I_2) = 4 \cdot 2 = 8$.

Concluzionăm că $2 \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 2 \cdot 8 - 12 = 4$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce din relația Hamilton-Cayley că $A^2 - 2A + 3I_2 = O_2$	1p
Obține că $\det(A^2 + 3I_2) = \det(2A) = 12$	1p
Obține că $\det(A^2 + I_2) = \det(2(A - I_2)) = 4 \cdot \det(A - I_2)$	2p
Calculează $\det(A - I_2)$ și obține $\det(A - I_2) = 2$, de unde $\det(A^2 + I_2) = 8$	2p
Concluzionează că $2 \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 2 \cdot 8 - 12 = 4$	1p

2. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că:

a) dacă $I_n + AB$ este inversabilă, atunci $I_n + BA$ este inversabilă.

b) dacă $I_n + (AB)^p$ este inversabilă, atunci $I_n + (BA)^p$ este inversabilă, pentru orice $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

Soluție:

a) Dacă $I_n + AB$ este inversabilă, atunci există $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât

$$C \cdot (I_n + AB) = (I_n + AB) \cdot C = I_n, \text{ adică } C + CAB = C + ABC = I_n, \text{ de unde obținem}$$

$$CAB = ABC = I_n - C.$$

Avem:

$$\begin{aligned} (I_n + BA) \cdot (I_n - BCA) &= I_n - BCA + BA - B(ABC)A = I_n - BCA + BA - B(I_n - C)A = \\ &= I_n - BCA + BA - BA + BCA = I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I_n - BCA) \cdot (I_n + BA) &= I_n + BA - BCA - B(CAB)A = I_n - BCA + BA - B(I_n - C)A = \\ &= I_n - BCA + BA - BA + BCA = I_n \end{aligned}$$

Prin urmare, $I_n + BA$ este inversabilă și $(I_n + BA)^{-1} = I_n - BCA$.

$$\text{b) Avem că } I_n + (AB)^p = I_n + A \left(\underbrace{BABABA \dots BA}_{(p-1) \text{ perechi}} \right) B = I_n + A \cdot M, \text{ unde } M = (BA)^{p-1} \cdot B.$$

Cum $I_n + A \cdot M$ este inversabilă, din rezultatul de la punctul a) rezultă că $I_n + M \cdot A$ este inversabilă.

Deci $I_n + (BA)^{p-1} \cdot B \cdot A = I_n + (BA)^p$ este inversabilă, pentru orice $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Cum $I_n + AB$ inversabilă ,există $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $C \cdot (I_n + AB) = (I_n + AB) \cdot C = I_n$ și deduce că $CAB = ABC = I_n - C$	2p
Calculează $(I_n + BA) \cdot (I_n - BCA) = I_n$	1p
Calculează $(I_n - BCA) \cdot (I_n + BA) = I_n$	1p
Deduce că $I_n + BA$ este inversabilă și $(I_n + BA)^{-1} = I_n - BCA$.	1p
b) Scrie $I_n + (AB)^p = I_n + A \left(\underbrace{BABABA...BA}_{(p-1) \text{ perechi}} \right) B = I_n + A \cdot M$, cu $M = (BA)^{p-1} \cdot B$	1p
Folosește a) și deduce că $I_n + M \cdot A = I_n + (BA)^p$ este inversabilă	1p

3. a) Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n+1} \right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + 2n + 2} \right)$.

Soluție:

$$a) \{x\} = x - [x], \quad \left\{ \sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n+1} \right\} = \sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n+1} - \left[\sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n+1} \right].$$

$$a^2 n^2 + (2a-1)n+1 = a^2 n^2 + 2an - n + 1 = a^2 n^2 + 2an + 1 - n = (an+1)^2 - n < (an+1)^2$$

Pe de altă parte, $a^2 n^2 + (2a-1)n+1 > a^2 n^2, \quad \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}$.

Rezultă $a^2 n^2 < a^2 n^2 + (2a-1)n+1 < (an+1)^2, \quad \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}$,

de unde $an < \sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n+1} < an+1, \quad \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}$,

deci $\left[\sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n+1} \right] = an$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n+1} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n+1} - an \right) \stackrel{\infty-\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 n^2 + (2a-1)n+1 - a^2 n^2}{\sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n+1} + an} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2a-1)n+1}{\sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n+1} + an} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2a-1 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(\sqrt{a^2 + (2a-1)\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + a \right)} = \frac{2a-1}{2a}.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + 2n + 2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + 2n + 2} - \pi n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left[\pi \left(\sqrt{n^2 + 2n + 2} - n \right) \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \frac{n^2 + 2n + 2 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n + 2} + n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \frac{2n + 2}{\sqrt{n^2 + 2n + 2} + n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left[\pi \frac{n \left(2 + \frac{2}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} + 1 \right)} \right] = 0$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Obține $\left[\sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n+1} \right] = an$	1p
Obține că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n+1} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n+1} - an \right)$	1p
Amplifică cu conjugata expresiei $\sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n+1} - an$	1p
Finalizează limita și obține $\frac{2a-1}{2a}$	1p
b) Scrie limita ca $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + 2n + 2} - \pi n \right)$	1p
Amplifică cu conjugata expresiei $\pi \sqrt{n^2 + 2n + 2} - \pi n$	1p
Obține limita 0	1p

4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_0 = 0$ și $x_{n+1} = x_n + a + \sqrt{b^2 + 4ax_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $a, b > 0$. Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2}$.

Soluție:

Luând $n = 0$ în relația de recurență, obținem $x_1 = x_0 + a + \sqrt{b^2 + 4ax_0} = a + \sqrt{b^2} = a + b$.

Luând $n = 1$ în relația de recurență, obținem $x_2 = x_1 + a + \sqrt{b^2 + 4ax_1} = 2a + b + \sqrt{b^2 + 4a^2 + 4ab} = 2a + b + \sqrt{(2a + b)^2} = 4a + 2b$.

Arătăm prin inducție matematică faptul că $x_n = n^2a + nb, \forall n \in \mathbb{N}$. Fie propoziția $P(n)$: $x_n = n^2a + nb, \forall n \in \mathbb{N}$.

Etapa de verificare. $P(0)$: $x_0 = 0^2a + 0b = 0$, ceea ce e adevărat din ipoteză.

Etapa de demonstrație. Presupunem propoziția $P(k)$: $x_k = k^2a + kb, k \in \mathbb{N}$ adevărată și demonstrăm că propoziția $P(k+1)$: $x_{k+1} = (k+1)^2a + (k+1)b$ este adevărată. Folosind relația de recurență, avem că $x_{k+1} = x_k + a + \sqrt{b^2 + 4ax_k} = k^2a + kb + a + \sqrt{b^2 + 4a(k^2a + kb)} = k^2a + kb + a + \sqrt{b^2 + 4a^2k^2 + 4abk} = k^2a + kb + a + \sqrt{(2ak + b)^2} = k^2a + kb + a + 2ak + b = a(k^2 + 2k + 1) + b(k + 1) = (k + 1)^2a + (k + 1)b$, deci $P(k + 1)$ este adevărată. Conform principiului inducției matematice, $P(n)$ este o propoziție adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci avem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2a + nb}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) = a$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce prin calcul direct că $x_1 = a + b$	1p
Deduce prin calcul direct că $x_2 = 4a + 2b$	1p
Demonstrează prin inducție matematică faptul că $x_n = n^2a + nb, \forall n \in \mathbb{N}$	4p
Obține că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2a + nb}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) = a$	1p