



Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului
și Sportului
Inspectoratul Școlar Județean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică Clasa a XI-a

Craiova, 9 februarie 2013

Problema 1. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale convergent la a , având toți termenii diferiți de a , și fie $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ o funcție. Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{k(n)} = a$;
- (b) pentru orice $y \in \mathbb{N}$ mulțimea $\{x \in \mathbb{N} | k(x) = y\}$ este finită (mulțimea vidă este finită, având *zero* elemente).

Problema 2. Fie $a, b > 0$ și funcțiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b^3$ și

$$f\left(\frac{ax^2 + b}{\sqrt{1 + x^4}}\right) \cdot g(x) = x \quad \text{pentru orice } x > 0.$$

Să se arate că funcția g nu este mărginită.

Problema 3. Demonstrați că toți termenii șirului definit prin relațiile

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 1 + 2x_n + \sqrt{3x_n^2 + 6x_n + 1}, \quad n \geq 0,$$

sunt numere naturale.

Problema 4. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 2013 & 2011 & 0 \\ -2012 & 0 & 2011 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze A^n , unde $n \in \mathbb{N}$.

Notă:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 (din oficiu) la 10.
3. Timp de lucru: 3 ore.