

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI TIMIȘ
CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA LOCALĂ – 21 FEBRUARIE 2020
CLASA a IX-a

H1

BAREM DE CORECTARE

I.

Demonstrați următoarele inegalități:

a) $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz} (\forall) x, y, z \in \mathbf{R}_+$

b) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, (\forall) a, b, c \in \mathbf{R}_+$

Rezolvare:

a) Inegalitatea din enunț este echivalentă cu $2x + 2y + 2z - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{yz} - 2\sqrt{xz} \geq 0,$ care, la rândul ei, este echivalentă cu $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 + (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2 \geq 0,$ adevărată pentru orice numere reale pozitive x, y, z .	1p
b) Notând $a + b = x, b + c = y, c + a = z$, obținem $a = \frac{x+z-y}{2}, b = \frac{x+y-z}{2}, c = \frac{y+z-x}{2}$. Cu aceste notații, inegalitatea din enunț devine: $\frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} + \frac{y+z-x}{x} \geq 3,$ inegalitate echivalentă cu $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) \geq 6$, și care se obține însumând inegalitățile: $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}}; \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq 2\sqrt{\frac{x}{z} \cdot \frac{z}{x}}; \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) \geq 2\sqrt{\frac{z}{y} \cdot \frac{y}{z}}.$	3p 2p

II.

a) Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = n(n+1)(2n-1)$ pentru orice $n \geq 1$. Arătați că $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică.

b) Într-un cerc dat se înscrie un pătrat, apoi în pătrat se înscrie un cerc, în care se înscrie un nou pătrat, în care se înscrie un cerc, procedeul continuând de un număr infinit de ori. Demonstrați că:

- i) Perimetrele pătratelor formează o progresie geometrică
- ii) Ariile discurilor formează o progresie geometrică.

Rezolvare:

a) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n + (n+1)a_{n+1} = (n+1)(n+2)(2n+1)$ $n(n+1)(2n-1) + (n+1)a_{n+1} = (n+1)(n+2)(2n+1)$ $a_{n+1} = 6n + 2, (\forall) n \geq 1$ Repetând raționamentul pentru a_n obținem $a_n = 6n - 4, (\forall) n \geq 1$. Deducem $a_{n+1} - a_n = 6, (\forall) n \geq 1$, deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație 6.	1p 1p 1p
b) i) Fie P_n și P_{n+1} două pătrate consecutive, sunt unul circumscris și unul înscris	

$\Rightarrow x \in \left[\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right)$	1p
Cazul IV: $x \in [\sqrt{3}, 2) \Rightarrow x^2 \in [3, 4) \Rightarrow [x^2] = 3 \Rightarrow [2x] = 3 \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right) \Rightarrow x \in [\sqrt{3}, 2)$	1p
Cazul V: $x \in [2, \sqrt{5}) \Rightarrow x^2 \in [4, 5) \Rightarrow [x^2] = 4 \Rightarrow [2x] = 4 \Rightarrow x \in \left[2, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow x \in [2, \sqrt{5})$	1p
Cazul VI: $x \in [\sqrt{5}, 1 + \sqrt{2}) \Rightarrow x^2 \in [5, 3 + \sqrt{8}) \Rightarrow [x^2] = 5 \Rightarrow [2x] = 5 \Rightarrow x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right)$, contradicție.	1p
Soluția ecuației este: $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right) \cup [\sqrt{3}, 2) \cup [2, \sqrt{5})$ sau $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right) \cup [\sqrt{3}, \sqrt{5})$	1p

în același cerc. Pătratul înscris în cerc are diagonala egală cu diametrul cercului, iar pătratul circumscris are latura egală cu diametrul cercului. Raportul	1p
perimetrelor lor este egal cu raportul laturilor lor, adică $\frac{4l_{n+1}}{4l_n} = \frac{\frac{d}{\sqrt{2}}}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, constant $\Rightarrow$ Șirul perimetrelor pătratelor este o progresie geometrică.	1p
b) ii) Fie C_n și C_{n+1} două cercuri consecutive, sunt unul circumscris și unul înscris în același pătrat. Diametrele lor sunt egale respectiv cu diagonala și latura pătratului, deci raportul razelor lor este $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, iar raportul ariilor discurilor este $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2 = \frac{1}{2}$, constant $\Rightarrow$ șirul ariilor discurilor este o progresie geometrică.	1p 1p

III.

În triunghiul ABC se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in BC$ astfel încât $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CP}$, $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$ și $\frac{NC}{AC} = \frac{2}{5}$. Arătați că punctele M, N, P sunt coliniare și determinați raportul $\frac{MN}{MP}$.

Rezolvare:

Din $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CP}$ obținem $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{CP}$, de unde $\frac{BP}{PC} = 3$.	1p
Din $\frac{NC}{AC} = \frac{2}{5}$ obținem $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{5}$	1p
Se observă că $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = 1$ și, conform reciprocei teoremei lui Menelaus, punctele M, N, P sunt coliniare.	1p
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$	1p
$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ $= \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)$	2p
Finalizare: $\frac{MN}{MP} = \frac{2}{5}$	1p

IV.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $[2x] = [x^2]$.

G. M. 6-7-8 / 2019

Rezolvare:

Cum $x^2 \geq 0 \Rightarrow [x^2] \geq 0 \Rightarrow [2x] \geq 0 \Rightarrow x \in [0, +\infty)$	
$[2x] = [x^2] \Rightarrow x^2 - 2x < 1 \Rightarrow (x-1)^2 < 2 \Rightarrow -\sqrt{2} < x-1 < \sqrt{2} \Rightarrow x \in [0, 1 + \sqrt{2})$	
Cazul I: $x \in [0, 1) \Rightarrow x^2 \in [0, 1) \Rightarrow [x^2] = 0 \Rightarrow [2x] = 0 \Rightarrow x \in [0, \frac{1}{2})$	1p
Cazul II: $x \in [1, \sqrt{2}) \Rightarrow x^2 \in [1, 2) \Rightarrow [x^2] = 1 \Rightarrow [2x] = 1 \Rightarrow x \in [\frac{1}{2}, 1)$, contradicție	1p
Cazul III: $x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \Rightarrow x^2 \in [2, 3) \Rightarrow [x^2] = 2 \Rightarrow [2x] = 2 \Rightarrow x \in [1, \frac{3}{2})$	

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI"

etapa locală – 21 februarie 2020

CLASA A X-A

Filiera teoretică, profil real, specializarea Științele naturii

BAREM DE CORECTARE

H1

SUBIECTUL I

Fie numărul $a = \sqrt[3]{4 + \sqrt{15}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{15}}$.a) Verificați egalitatea $a^3 - 3a - 8 = 0$.b) Demonstrați că $a \in (\sqrt{3}, 3)$.c) Demonstrați că numărul $x = \log_2(a^2 - 3) + \log_a\left(\frac{8}{a} + 3\right) + \log_{\frac{1}{2}a}$ este natural.

a) Obține $a^3 = 4 + \sqrt{15} + 4 - \sqrt{15} + 3\sqrt[3]{(4 + \sqrt{15}) \cdot (4 - \sqrt{15})} \cdot a$	1p
Deduce $a^3 = 3a + 8$, deci $a^3 - 3a - 8 = 0$	1p
b) Observă $a > 0$ și din $8 = a(a^2 - 3)$ deduce $a > \sqrt{3}$	1p
Dacă $a \geq 3$ se obține contradicție cu $8 = a(a^2 - 3)$, deci $a \in (\sqrt{3}, 3)$.	1p
c) Folosește $a(a^2 - 3) = 8$ și obține $x = \log_2 \frac{8}{a} + \log_a a^2 + \log_2 a$	1p
$x = \log_2\left(\frac{8}{a} \cdot a\right) + 2$	1p
$x = 5 \in \mathbb{N}$	1p

SUBIECTUL II

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{2}{x^2} + 3, \forall x \in \mathbb{R}^*$.a) Determinați funcția f .b) Stabiliți dacă funcția f este bijectivă.c) Calculați suma $S = \sum_{k=2}^{2020} \frac{1}{f(k)-2}$.

a) Înlocuind pe x cu $\frac{1}{x}$ în relația dată obține:	
$f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{1}{x^2} + 2x^2 + 3, \forall x \in \mathbb{R}^*$	1p
Din relațiile:	
$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{2}{x^2} + 3, \forall x \in \mathbb{R}^*$	
$f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{1}{x^2} + 2x^2 + 3, \forall x \in \mathbb{R}^*$	1p
obține $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) - 4f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2} + 3 - \frac{2}{x^2} - 4x^2 -$	1p

6Deci $f(x) = x^2 + 1$	
b) Deduce că f nu este injectivă	1p
Deduce că f nu este surjectivă, deci nu este bijectivă	1p
c) Calculează $S = \sum_{k=2}^{2020} \frac{1}{f(k)-2} = \sum_{k=2}^{2020} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{2020} \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2020} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$	1p
Obține $S = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} \right)$	1p

SUBIECTUL III

- a) Arătați că $a = 0$, unde $a = 2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$.
- b) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_2 2^3} + \frac{1}{\log_2 3^3} + \dots + \frac{1}{\log_2 n^3} = 55 \log_2 3$.
- c) Fie $a, b, c > 0$, $ab \neq 1$, $bc \neq 1$, $ac \neq 1$. Dacă $x = \log_{bc} a$, $y = \log_{ca} b$, $z = \log_{ab} c$, demonstrați că $a^{(x+1)(y-z)} \cdot b^{(y+1)(z-x)} \cdot c^{(z+1)(x-y)} = 1$

a) Deduce $2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 2}} \Leftrightarrow \sqrt{\log_2 3} \cdot \log_2 2 = \sqrt{\log_3 2} \cdot \log_2 3 \Leftrightarrow \sqrt{\log_2 3} = \sqrt{\log_3 2} \cdot \log_2 3 \Leftrightarrow \log_2 3 = \log_3 2 \cdot (\log_2 3)^2 \Leftrightarrow 1 = \log_3 2 \cdot \log_2 3$ (adevărat), deci $a=0$	2p
b) Calculează $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\log_2 k^3} = \sum_{k=1}^n (k \cdot \log_3 2) = \log_3 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$	1p
Obține $\frac{n(n+1)}{2} = 55$, de unde $n=10$	1p
c) Utilizează $\log_{bc} a = x \Rightarrow a = (bc)^x \Rightarrow a^{x+1} = (abc)^x$. Analog $b^{y+1} = (abc)^y$, $c^{z+1} = (abc)^z$	1p
Obține: $a^{(x+1)(y-z)} = (abc)^{x(y-z)}$, $b^{(y+1)(z-x)} = (abc)^{y(z-x)}$, $c^{(z+1)(x-y)} = (abc)^{z(x-y)}$	1p
Finalizare	1p

SUBIECTUL IV

Fie $z_1, z_2, \dots, z_{2020} \in \mathbb{C}$, astfel încât $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_{2020}| = 1$ și $z_1 + z_2 + \dots + z_{2020} = 0$.

- a) Demonstrați că $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_{2020}|^2 = 2020(|z|^2 + 1)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.
- b) Arătați că, dacă $|z - z_1| \leq 1$, $|z - z_2| \leq 1, \dots, |z - z_{2020}| \leq 1$, atunci $z=0$.

a) Utilizează $z - z_k ^2 = (\overline{z} - \overline{z_k}) \cdot (z - z_k) = z ^2 + z_k ^2 - \overline{z}z_k - z\overline{z_k}$, $\forall k = \overline{1, 2020}$ Adunând relațiile pentru $k = \overline{1, 2020}$ obține: $ z - z_1 ^2 + z - z_2 ^2 + \dots + z - z_{2020} ^2 =$ $= 2020 z ^2 + z_1 ^2 + z_2 ^2 + \dots + z_{2020} ^2 - z(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_{2020}}) -$ $-\overline{z}(z_1 + z_2 + \dots + z_{2020})$ Folosește relațiile: $z_1 + z_2 + \dots + z_{2020} = 0, \overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_{2020}} = 0, z_1 = z_2 = \dots = z_{2020} = 1$ și finalizează	1p 2p 1p
b) Ridicând la pătrat și adunând inegalitățile din enunț obține: $ z - z_1 ^2 + z - z_2 ^2 + \dots + z - z_{2020} ^2 \leq 2020$ Din (a) obține: $2020(z ^2 + 1) \leq 2020 \Rightarrow z ^2 \leq 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow z = 0$	2p 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
 INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI TIMIȘ
 CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"
 ETAPA LOCALĂ – 21 FEBRUARIE 2020
 CLASA a XI-a

H1

BAREM DE CORECTARE

I.

În $M_2(R)$ se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X(a) \mid a \in R, X(a) = I_2 + aA\}$.

- Calculați A^2 .
- Arătați că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$, oricare ar fi a, b numere reale.
- Arătați că $X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(2019) = X(2020! - 1)$.

Rezolvare:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	1p
b) $X(a) \cdot X(b) = I_2 + aA + bA + abA^2$	1p
Finalizare	1p
c) Demonstrează că $X(a+b+ab) = X((a+1)(b+1)-1)$	1p
Demonstrează prin inducție că $X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(n) = X((n+1)! - 1)$	
Etapa de verificare (sau observă că $X(1) \cdot X(2) = X(3! - 1)$, $X(1) \cdot X(2) \cdot X(3) = X(4! - 1)$)	1p
Etapa de demonstrație	1p
Finalizare	1p

II.

În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(m, m)$, $B(1, m-2)$ și $C(-4, 2m+1)$

- Dacă $m=3$ determinați ecuația dreptei BC .
- Verificați că pentru orice număr real m , punctele A, B, C nu sunt coliniare.
- Demonstrați că aria triunghiului ABC este cel puțin 3.

Rezolvare:

a) $BC: 6x+5y-11=0$	1p
b) $\Delta = -m^2 - 2m - 7$	1p
Arată că $-m^2 - 2m - 7 \neq 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow A, B, C$ nu sunt coliniare	1p
c) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \Delta $	1p
$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot (m^2 + 2m + 7)$	1p
$\min_{m \in \mathbb{R}} (m^2 + 2m + 7) = 6$	1p
Finalizare: $\min_{m \in \mathbb{R}} A_{\Delta ABC} = 3$	1p

III.

a) Calculați următoarea limită: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x}$.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să aibă limită în punctul $x_0=0$, unde

$$f: [-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\left(e^{\frac{3x}{2}} - 1\right)(m+1)}, & -4 \leq x < 0 \\ \sqrt{m^2 - 2me^x + 1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x+x^2} \cdot \frac{x+x^2}{x}$	1p
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x+x^2} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{x} = 1$	1p
Finalizare : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x} = 1$	1p
b) $l_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(m+1) \cdot (\sqrt{x+4} + 2) \cdot \frac{e^{\frac{3x}{2}} - 1}{\frac{3x}{2}}} = \frac{1}{6(m+1)}$	1p
$l_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \sqrt{(m-1)^2} = m-1 $	1p
$l_s(0) = l_d(0) \Rightarrow \frac{1}{6(m+1)} = m-1 $	1p
Dacă $m \in [1, +\infty) \Rightarrow m = \sqrt{\frac{7}{6}}$	
Dacă $m \in (-\infty, 1) \Rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{5}{6}}$	1p

IV.

1. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta $y = \frac{1}{4}x + 1$ să fie asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{(ax+b)^2}$, D fiind domeniul maxim de definiție.

2. Să se determine parametrul real a astfel încât $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5} + a}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x^2+5x+23} - 9}$ să fie finită și apoi să se calculeze această limită.

Rezolvare:

a) $m = \frac{1}{4}$	
$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{a^2}$	1p
$\Rightarrow a = \pm 2$	
$n = 1$	
$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$	
$\Rightarrow -\frac{b}{2a} = 1$	1p
Dacă $a=2 \Rightarrow b=-4$	
Dacă $a=-2 \Rightarrow b=4$	1p

b) Dacă $a \neq -5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5} + a}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x^2+5x+23} - 9}$ este infinită (nu convine) Dacă $a = -$	1p
$5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5} - 5}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x^2+5x+23} - 9} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2 + \sqrt{x^2+5} - 3}{\sqrt{3x-2} - 2 + \sqrt{4x^2+5x+23} - 7} =$	
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} + \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}}{\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2} + \frac{\sqrt{4x^2+5x+23}-7}{x-2}}$	1p
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \frac{1}{4}$	
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x - 2} = \frac{2}{3}$	
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x - 2} = \frac{3}{4}$	1p
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x^2+5x+23} - 7}{x - 2} = \frac{3}{2}$	1p
Finalizare: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5} - 5}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x^2+5x+23} - 9} = \frac{11}{27}$	

CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI"

etapa locală – 21 februarie 2020

CLASA A XII-A

Filiera teoretică, profil real, specializarea Științele naturii

BAREM DE CORECTARE

H1

SUBIECTUL I

Pe mulțimea $G = (0, \infty)$ se consideră legea de compoziție $x * y = \frac{xy}{x+y-2020}$.

- a) Demonstrați că legea " $*$ " este asociativă.
b) Stabiliți dacă legea " $*$ " admite element neutru.
c) $\frac{2020}{2019} * \frac{2020}{2018} * \dots * \frac{2020}{2} * 2020 * (2 \cdot 2020) * (3 \cdot 2020) * \dots (2019 \cdot 2020)$.

a) Calculează $(x * y) * z = \frac{xyz}{xy+xz+yz-2020(x+y+z-2020)}$	1p
Calculează $x * (y * z) = \frac{xyz}{xy+xz+yz-2020(x+y+z-2020)}$	1p
Finalizare	1p
b) Din $x * e = e * x = x$ obține $\frac{xe}{x+e-2020} = x$	1p
Deduce că legea nu admite element neutru	1p
c) Observă că $2020 * x = x * 2020 = 2020$, pentru orice x din G	1p
Notează $\frac{2020}{2019} * \frac{2020}{2018} * \dots * \frac{2020}{2} = a$ și	
$(2 \cdot 2020) * (3 \cdot 2020) * \dots (2019 \cdot 2020) = b$	
Obține	
$\frac{2020}{2019} * \frac{2020}{2018} * \dots * \frac{2020}{2} * 2020 * (2 \cdot 2020) * (3 \cdot 2020) * \dots (2019 \cdot 2020) =$	
$= a * 2020 * b = (a * 2020) * b = 2020 * b = 2020$	1p

SUBIECTUL II

$$\text{Fie}M = \left\{ A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}.$$

- Arătați că $(M, \cdot)$ este grup abelian.
- Calculați simetricul elementului $A(2020)$.
- Calculați $A^n(x), n \in \mathbb{N}^*$.

a) Obține $A(x) \cdot A(y) = A(x + y - 2xy)$ Deduce că pentru $x \neq \frac{1}{2}$ și $y \neq \frac{1}{2}$ se obține $x + y - 2xy \neq \frac{1}{2}$ Stabilește că înmulțirea matricelor din M este asociativă, comutativă și are elementul neutru A(0).	1p 1p
--	----------

Deduce că simetricul elementului $A(x)$ este $A(x') = A\left(\frac{x}{2x-1}\right), x \neq \frac{1}{2}$ și finalizează.	1p
b) Stabilește că simetricul elementului $A(2020)$ este $A\left(\frac{2020}{4039}\right)$	1p
c) Arată că $A^2(x) = A\left(\frac{1-(1-2x)^2}{2}\right), A^3(x) = A\left(\frac{1-(1-2x)^3}{2}\right)$ Demonstrează prin inducție matematică $A^n(x) = A\left(\frac{1-(1-2x)^n}{2}\right)$	2p 1p

SUBIECTUL III

Fie șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu termenul general $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+a} dx, a > 0$.

- Demonstrați că $I_{n+2} + I_{n+1} + a \cdot I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Demonstrați că $\frac{1}{(a+2)(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{(a+2)(n-1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.
- Determinați numărul real a știind că $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot I_n) = \frac{1}{2020}$.

a) $I_{n+2} + I_{n+1} + a \cdot I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}+x^{n+1}+a \cdot x^n}{x^2+x+a} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$	2p
b) Deduce $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+x+a} dx \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Obține $\frac{1}{n+1} = I_{n+2} + I_{n+1} + a \cdot I_n \leq (2+a) \cdot I_n \Rightarrow I_n \geq \frac{1}{(a+2)(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Obține $\frac{1}{n+1} = I_{n+2} + I_{n+1} + a \cdot I_n \geq (2+a) \cdot I_{n+2} \Rightarrow I_{n+2} \leq \frac{1}{(a+2)(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow I_n \leq \frac{1}{(a+2)(n-1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2.$	1p 1p 1p
c) Folosește $\frac{1}{(a+2)(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{(a+2)(n-1)}$ și obține $\frac{n}{(a+2)(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{(a+2)(n-1)}$ Obține $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot I_n) = \frac{1}{a+2}$ (T. cleștelui) și din $\frac{1}{a+2} = \frac{1}{2020}$ deduce $a=2018$	1p 1p

SUBIECTUL IV

Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, F(x) = \frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$.

- Arătați că F este o primitivă a funcției f .
- Dacă $a=0$, calculați $\int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx$.

c) Determinați a astfel încât $\int_0^2 F(x)dx - \int_{-2}^0 F(x)dx = 2$.

a) Obține $F'(x) = \frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$ Deduce $F'(x) = f(x)$ și F derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci F este primitivă a funcției f .	1p 1p
b) Calculează $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx = F(x) \Big _0^{\sqrt{3}} = F(\sqrt{3}) - F(0) = -1$, pentru $a=0$	2p
c) Face substituția $x = -t$ și obține $\int_{-2}^0 F(x)dx = -\int_2^0 F(-t)dt = \int_0^2 F(-x)dx$ Obține $\int_0^2 F(x)dx - \int_{-2}^0 F(x)dx = \int_0^2 F(x) - \int_0^2 F(-x)dx = \int_0^2 \frac{2ax}{\sqrt{x^2+1}}dx =$ $2a\sqrt{x^2+1} \Big _0^2 = 2a(\sqrt{5}-1)$ Din $2a(\sqrt{5}-1) = 2$ obține $a = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$	1p 1p 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI" etapa locală – 21 februarie 2020
CLASA a IX-a

H2

Filiera tehnologică : toate specializările, filiera teoretică – profilul umanist, filiera vocațională – toate profilurile cu excepția profilului militar

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_3 = -4$ și $a_5 = 6$.

- a) Determinați primul termen și rația progresiei.
b) Calculați $a_1 + a_5 + a_9 + \dots + a_{401}$.

- c) Demonstrați egalitatea $\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a) Determină $r = 5$ $a_1 = -14$	1p 1p
b) numărul de termeni ai sumei este 101 $a_1 + a_5 + a_9 + \dots + a_{401} = 101 \cdot 986$ Sau : $a_1 + a_5 + a_9 + \dots + a_{401} = 101a_1 + 4r + 8r + 12r + \dots + 400r$ Finlizează)	1p 2p (1p) (2p)
c) $\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{1}{r} \left(\frac{a_2 - a_1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} \cdot a_n} \right), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Finalizare (sau aplică metoda inducției matematice și demonstrează egalitatea)	1p 1p (2p)

SUBIECTUL II

Se consideră predicatele $p(x): |2x-1| + |3-6x| = 4, x \in \mathbb{R}$ și $q(n): \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$.

- a) Aflați valoarea de adevăr a propoziției $p(-1) \rightarrow q(1)$.
b) Determinați mulțimea valorilor de adevăr ale predicatului $p(x)$.
c) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției $\forall n, q(n)$.

a) $v(p(-1)) = 0, v(q(1)) = 1$ $\Rightarrow v(p(-1) \rightarrow q(1)) = 1$.	1p 1p
b) $ 2x-1 + 3-6x = 4 \Leftrightarrow 4 2x-1 = 4$ Determină mulțimea valorilor de adevăr ale predicatului $p(x): \{1; 0\}$	2p 1p
c) $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} = \sqrt{(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1}$ Notand $n^2+3n = a$, obține $\sqrt{a(a+2)+1} = \sqrt{(a+1)^2} = \sqrt{(n^2+3n+1)^2} \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\forall n, q(n)$ adevărată . ($v(\forall n, q(n)) = 1$)	1p 1p

SUBIECTUL III

a) Demonstrați, folosind eventual metoda inducției matematice, egalitatea:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Calculați $\frac{6^2}{12^2-1} + \frac{7^2}{14^2-1} + \dots + \frac{16^2}{32^2-1}$.

a) Etapa de verificare	1p
$p(n+1) \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$	1p
Finalizează etapa de demonstrație	2p
b) $\frac{6^2}{12^2-1} + \frac{7^2}{14^2-1} + \dots + \frac{16^2}{32^2-1} = \frac{16(16+1)}{2(32+1)} - \frac{5(5+1)}{2(10+1)}$	2p
Obține $\frac{91}{33}$.	1p

SUBIECTUL IV

Se consideră triunghiul echilateral ABC cu $AB=12$. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului și M mijlocul laturii BC .

a) Demonstrați $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

b) Demonstrați $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

c) Dacă D este simetricul punctului O față de M , calculați modulul vectorului $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DO}$.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM}$ De unde concluzia	1p 1p
b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM}$ Justifică $2\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OA}$, de unde $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$	1p 1p
c) Cum în patrulaterul $\Rightarrow DBOC$ diagonalele se înjumătățesc $\Rightarrow DBOC$ paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DO} = 2 \overrightarrow{DO} $	1p
$ \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}AM$	1p
$ \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DO} = 2 \overrightarrow{DO} = 8\sqrt{3}$	1p

H2**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ****"ADOLF HAIMOVICI"***etapa locală – 21 februarie 2020***CLASA A X-A**

Filiera tehnologică : toate specializările, filiera teoretică – profilul umanist, filiera vocațională – toate profilurile cu excepția profilului militar

BAREM DE CORECTARE**SUBIECTUL I**

Se consideră numerele reale $a = (\sqrt{5} + 5) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} \right)$,

$$b = \left[\frac{2^{100} + 10^{100}}{25^{100} - 1} \cdot \left((2,5)^{100} - (0,5)^{100} \right) \right]^{0,01} \quad \text{și} \quad c = \log_2 \sqrt{3} - \log_4 (3 \cdot \sqrt[3]{16}).$$

a) Arătați că numărul real a este pătrat perfect.

b) Arătați că $b = 1$.

c) Calculați media geometrică a numerelor $\sqrt[3]{a}$, b , 2^c .

a)	$a = (\sqrt{5} + 5) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} - \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{20}} \right)$ Obține $a = 4 = 2^2$	1p 1p
b)	$b = \left[\frac{2^{100} + 10^{100}}{25^{100} - 1} \cdot \left(\frac{5^{100} - 1}{2^{100}} \right) \right]^{0,01}$ $b = \left[\frac{2^{100}(1 + 5^{100})}{(5^{100} - 1)(5^{100} + 1)} \cdot \left(\frac{5^{100} - 1}{2^{100}} \right) \right]^{0,01} = 1$	1p 1p
c)	$c = \frac{1}{2} \log_2 3 - \frac{1}{2} \log_2 (3 \cdot \sqrt[3]{16})$ Obține $c = -\frac{2}{3}$ $mg = \sqrt[3]{2^{\frac{2}{3}} \cdot 1 \cdot 2^{-\frac{2}{3}}} = 1$	1p 1p 1p

SUBIECTUL II

Fie $E(x) = \log_2 \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $x \in D$, unde D este mulțimea tuturor valorilor reale ale lui x pentru care expresia este bine

definită. a) Calculați $E(\sqrt{2}-1)$. b) Determinați mulțimea D . c) Calculați $E(1) + E(2) + \dots + E(98) + \log_2 \frac{198}{25}$.

a)	$E(\sqrt{2}-1) = \log_2 \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2})^2}$ $E(\sqrt{2}-1) = -1$	1p 1p
----	---	----------

b)	Impune condiția $\frac{x(x+2)}{(x+1)^2} > 0$, Deduce $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$.	1p 1p
c)	$E(1) + E(2) + \dots + E(98) + \log_2 \frac{198}{25} = \log_2 \left(\frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{98 \cdot 100}{99^2} \right) + \log_2 \frac{198}{25} -$ $\log_2 \frac{100}{198} + \log_2 \frac{198}{25} = 2.$	1p 2p

SUBIECTUL III

Se consideră numerele complexe $z_1 = 12 - 5i$ și $z_2 = 1 + i$.

a) Determinați numerele $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $\frac{\overline{z_1}}{z_2} = a - bi$.

b) Calculați modulul numărului complex $\frac{z_1^3 \cdot z_2^{11}}{169i}$.

c) Determinați numărul complex z astfel încât $z^2 = 2z_1$.

a)	Deduce $a = \frac{17}{2}$, $b = \frac{7}{2}$	2p
b)	$\left \frac{z_1^3 \cdot z_2^{11}}{169i} \right = \frac{ z_1 ^3 \cdot z_2 ^{11}}{ 169i } =$ $= \frac{(13)^3 (\sqrt{2})^{11}}{169}$ $= 13 \cdot 32 \sqrt{2} = 416 \sqrt{2}$	1p 1p 1p
c)	Obține $a^2 - b^2 = 24$ și $2ab = -10$ Obține $z \in \{5 - i; -5 + i\}$	1p 1p

SUBIECTUL IV Se consideră o funcție $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ cu proprietatea $f(\log_2 x - 3) = \frac{x}{4}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

a) Calculați $2^{\log_2 5 - 2}$.

b) Determinați numerele reale a și t care verifică relațiile $a = \log_2 t - 3$ și $f(a) = 4$.

c) Calculați $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$.

a)	$2^{\log_2 5 - 2} = \frac{5}{4}$	2p
b)	$f(a) = 4 \Leftrightarrow f(\log_2 t - 3) = 4 \Leftrightarrow \frac{t}{4} = 4$ De unde $t = 16$ și $a = 1$	1p 1p
c)	$f(1) + f(2) + \dots + f(10) = f(\log_2 16 - 3) + f(\log_2 32 - 3) + \dots + f(\log_2 2^{13} - 3)$ $= \frac{2^4}{4} + \frac{2^5}{4} + \dots + \frac{2^{13}}{4} =$ $= 4092$ Sau: $\frac{x}{4} = 2^{\log_2 x - 2} \Rightarrow f(\log_2 x - 3) = 2^{\log_2 x - 2} \Rightarrow f(a) = 2^{a+1}$ si finalizează	1p 1p 1p (2p+ 1p)

H2**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"***etapa locală – 21 februarie 2020***CLASA A XI-A****BAREM DE CORECTARE****SUBIECTUL I**

Convenim să spunem că matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ este deosebită dacă $a + d = 0$ și determinantul ei este egal cu -1 .

a) Dați exemplu de o matrice deosebită.

b) Determinați numere reale $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ astfel încât matricea $\begin{pmatrix} x+y & -x-2y \\ x & -2y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$

să fie deosebită.

c) Dacă matricea A este deosebită calculați A^{2020} .

a) Furnizează un exemplu corect	2p
b) Deduce $x - y = 0$, $-2y(x + y) + x(x + 2y) = -1$ Finalizează și obține $(x, y) \in \{(1, 1), (-1, -1)\}$	1p
	2p
c) Deduce, eventual din ecuația lui Cayley sau prin calcul, $A^2 = I_2$ $\Rightarrow A^{2020} = I_2$	1p
	1p

SUBIECTUL II

Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} a \cdot x \left(2020^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right), & x < 1 \\ \frac{\ln(1 + e^x - e)}{x^2 - x}, & x > 1 \end{cases}, a \in \mathbf{R}.$

a) Pentru $a = 1$ determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f .

b) Determinați $a \in \mathbf{R}$ știind că există $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

a) Determină $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 2020$, De unde $y = \ln 2020$ asimptotă orizontală spre $-\infty$	1p
	1p
b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -a$. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \frac{\ln(1 + e^x - e)}{e^x - e} \cdot (e^x - e) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{(e^x - e)}{x^2 - x},$ $= \frac{e(e^{x-1} - 1)}{(x-1)x} = e,$ finalizează și obține $a = -e$	2p
	1p
	1p

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + a}}{x-1}$, $a \in [3, \infty)$.

a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .

b) Determinați $a \in [3, \infty)$, $b \in \mathbf{R}$ știind că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x) - b}{x^2 + x - 2} = \frac{5}{18}$.

a) Obține $y = 1$ ecuația asimptotei orizontale spre ∞ $y = -1$ ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ Determină corect limitele laterale și obține $x = 1$ ecuația asimptotei verticale	1p 1p 1p
b) Dacă $\sqrt{4+a} - b \neq 0 \Rightarrow$ nu există limita, deci acest caz nu convine. Deci $\sqrt{4+a} = b \Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + a} - b}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + a} - \sqrt{4+a}}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{(x+2)(\sqrt{x^2 + 3x + a} + \sqrt{4+a})}$ $= \frac{5}{6\sqrt{4+a}}$ Finalizează și obține $a = 5$, $b = 3$.	1p 2p 1p

SUBIECTUL IV

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$, $B(-1,4)$, $C(2,1)$. Dacă punctul $M(a, a-5)$, $a \in \mathbf{R}$, este coliniar cu B și C determinați aria triunghiului AMB .

2. Se consideră determinantul $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1-a^2 & 1-b^2 & 1-c^2 \\ (1-a)^2 & (1-b)^2 & (1-c)^2 \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$. Demonstrați că dacă a, b, c

reprezintă lungimile laturilor unui triunghi ABC și $D(a, b, c) = 0$, atunci $\triangle ABC$ este isoscel.

a) $M(a, a-5)$ coliniar cu B, C $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ a & a-5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a + a - 5 = 3 \Leftrightarrow a = 4$	2p
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow A_{\triangle AMB} = 5.$	1p
b) Transforma determinantul aplicând o proprietate finalizează (aplicând eventual formula determinantului de tip Vandermonde) obține forma $D(a, b, c) = -2(a-b)(b-c)(c-a)$ $D(a, b, c) = 0 \Leftrightarrow a = b$ sau $b = c$ sau $c = a$ de unde concluzia.	1p 2p 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 21 februarie 2020
CLASA A XII-A

H2

BAREM DE CORECTARE

Filiera tehnologică : toate specializările, filiera teoretică – profilul umanist, filiera vocațională – toate profilurile cu excepția profilului militar

SUBIECTUL I

Pe $(2, \infty)$ definim legea de compoziție $x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20}$, oricare ar fi $x, y \in (2, \infty)$.

- Verificați dacă $(x \circ y - 2)(x \circ y + 2) = (x^2 - 4)(y^2 - 4)$, $\forall x, y \in (2, \infty)$.
- Determinați elementul neutru al legii.
- Știind că $((2, \infty), \circ)$ este grup demonstrați că funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (2, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ este morfism de grupuri între grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive $((0, \infty), \cdot)$ și grupul $((2, \infty), \circ)$.

a) Demonstrează relația	2p
b) Din $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in (2, \infty) \Rightarrow e = \pm\sqrt{5}$ $e \in (2, \infty) \Rightarrow e = \sqrt{5}$	2p 1p
c) $f(x \cdot y) = \sqrt{x^2 y^2 + 4}$ $f(x) \circ f(y) = \sqrt{x^2 + 4} \circ \sqrt{y^2 + 4} =$ $= \sqrt{x^2 y^2 + 4}$ de unde concluzia.	1p 1p

SUBIECTUL II

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ și mulțimea $G = \{X(a) \in M_2(\mathbf{R}) \mid X(a) = I_2 + aA\}$.

- Arătați că mulțimea G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor de ordinul doi.
- Știind că G împreună cu $\cdot$, operația de înmulțire a matricelor de ordinul doi, este monoid comutativ, determinați elementele simetrizabile ale monoidului.
- Calculați $X\left(-\frac{1}{10}\right) \cdot X\left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot X(-1) \cdot X(0) \cdot X(1) \cdot X\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot X\left(\frac{1}{10}\right)$.

a) Demonstrează $X(a)X(b) = X(a+b+2ab)$, $\forall X(a), X(b) \in G$	2p
b) Precizează $I_2 = X(0) \in G$, de unde deduce că elementul neutru al legii este $X(0) = I_2$ (sau îl determină prin calcul)	1p
Determină simetricul elementului $X(a)$ ca fiind $X\left(-\frac{a}{2a+1}\right)$	1p
și impune condiția că $2a+1 \neq 0$ deduce că orice element $X(a)$ din G cu $a \neq -\frac{1}{2}$ este simetrizabil.	1p
c) Determină $w \in \mathbf{R}$ astfel încât $X(a)X(w) = X(w)X(a) = X(w) \Rightarrow w = -\frac{1}{2}$.	1p
Deduce $X\left(-\frac{1}{10}\right) \cdot X\left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot X\left(\frac{1}{10}\right) = X\left(-\frac{1}{2}\right)$.	1p

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x(x-1), & x < 0 \\ \frac{x^4 + x - 1}{x^2 + 1}, & x \geq 0 \end{cases}$. a) Arătați că funcția f admite primitive.

b) Calculați $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

a) Calculează $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -1 \Rightarrow f$ continuă în $x = 0$.	1p
Cum f continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty) \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbf{R} \Rightarrow f$ admite primitive	1p
b) $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$	1p
$\int_{-1}^0 f(x) dx = (e^x(x-2)) \Big _{-1}^0$	1p
$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$	1p
$= \left(\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) \Big _0^1$	1p
Finalizează și obține $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3}{e} - \frac{8}{3}$.	1p

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot e^{x^2}$. a) Calculați $\int_0^2 x f'(x) dx$.

b) Folosind eventual inegalitatea adevărată $e^x - 1 \geq x$, $\forall x \in [0, \infty)$ demonștrați $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx \geq \frac{10}{3}$.

c) Se consideră o funcție $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ care admite o primitivă G cu proprietatea că $g(x) = 2x \cdot G(x)$, $\forall x \in (0, \infty)$. Să se determine funcția g știind că $g(1) = 2$.

a) $\int_0^2 x f'(x) dx = x f(x) \Big _0^2 - \int_0^2 f(x) dx$	1p
$\int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} e' \Big _0^4$	1p
Finalizează și obține $\frac{7e^4 + 1}{2}$	1p
b) Cum $e^x - 1 \geq x$, $\forall x \in [0, \infty)$ și cum $x^2 \in [0, \infty) \forall x \in \mathbf{R}$ deduce $e^{x^2} \geq x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$,	1p
de unde $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx \geq \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big _1^2 = \frac{10}{3}$.	1p
c) $g(x) = 2x \cdot G(x)$, $\forall x \in (0, \infty) \Rightarrow \frac{g(x)}{G(x)} = 2x \Rightarrow \int \frac{g(x)}{G(x)} dx = x^2 + C \Rightarrow \ln(G(x)) = x^2 + c$	1p
de unde $G(x) = e^{x^2+c} \Rightarrow g(x) = 2x e^{x^2+c}$ Cum $g(1) = 2 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow g(x) = 2x e^{x^2-1}$	1p