



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013**

CLASA a XII - a

1. Fie A un inel în care $1 \neq 0$ cu proprietățile:

i. $a^4 = a^3$, oricare ar fi $a \in A$;

ii. dacă $a, b \notin U(A)$, atunci $a+b \notin U(A)$, unde $U(A)$ este mulțimea elementelor inversabile din inel.

Să se arate că $A = \mathbb{Z}_2$.

2. Să se determine numărul automorfismelor grupului $(\mathbb{Z}_{2011}, +)$.

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, continuă, cu proprietatea $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$. Să se calculeze

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+f(x)} \cdot \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

4. Fie șirul $a_n = \int_1^n \frac{1+\ln(1+\ln x)}{1+x^4} dx$, $n \geq 1$. Să se arate că șirul este convergent și că limita sa este mai mică decât $\frac{1}{2}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 3 ore