

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a XI-a

1) Fie $X, Y \in M_2(R)$. Să se arate că:

a) $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2\det(X) + 2\det(Y)$;

b) dacă $\det(XY + YX) \leq 0$, atunci $\det(X^2 + Y^2) \geq 0$.

(***)

2) a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}$;

b) Determinați valorile reale ale parametrilor a și b pentru care $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x^6} - \frac{b}{1-x^9} \right) = -\frac{1}{2}$.

(***)

3) a) Să se rezolve în $M_2(R)$ ecuația $X^{2013} = \begin{pmatrix} 1 & 2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Se consideră $A \in M_2(C)$ cu $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = 0$. Să se arate că $A^{2014} = O_2$.

(***)

4) Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}$, $n \geq 1$. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{n}{a_n} \right).$$

(Gazeta matematică nr. 5/2013)

Propunător: prof. Corneliu Huzum – C.E. “Mihail Kogălniceanu” - Focșani

SUCCES!

NOTĂ:

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.