

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 23 februarie 2018

CLASA a VIII-a

SOLUȚII ȘI BAREM

1.	a) Arătați că numărul $a = (4 + \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}}$ este natural.	
	b) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a \neq -b$, $a \neq -c$, $b \neq -c$ cu proprietatea $ab + bc + ca = 1009$. Demonstrați că: $\frac{a^2 + b^2 + 2018}{a + b} + \frac{b^2 + c^2 + 2018}{b + c} + \frac{c^2 + a^2 + 2018}{c + a} = 4 \cdot (a + b + c)$.	
	a) $a = \sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15})}$	1p
	$a = \sqrt{2 \cdot (4 + \sqrt{15})} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{16 - 15}$	1p
	$a = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$	1p
	$a = (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2 \in \mathbb{N}$	1p
	b) $2018 = 2 \cdot 1009 = 2ab + 2ac + 2bc$	1p
	$\frac{a^2 + b^2 + 2018}{a + b} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{a + b} = \frac{(a + b)^2 + 2c(a + b)}{a + b} = a + b + 2c$	1p
	Analog pentru celelalte două rapoarte și finalizare	1p
2.	a) Arătați că: $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.	
	b) Fie $E(n) = 1 - \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} - \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} - \dots - \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $E(n) > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.	
	a) $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2 \cdot (n+1)^2} =$	1p
	$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$	1p
	b) $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}$; $\frac{5}{2^2 \cdot 3^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}$; ..., $\frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$	2p
	$E(n) = \frac{1}{(n+1)^2}$	2p
	$E(n) > 0$	1p
3.	În cubul $ABCD A'B'C'D'$ notăm cu M, N, P mijloacele muchiilor AB , $B'C'$, respectiv	

DD' . Se dă $AB = 6\text{ cm}$. a) Calculați aria triunghiului MNP . b) Aflați sinusul unghiului format de planele (MNP) și (MNC) .		
a) Aplică Teorema lui Pitagora în $\triangle DAM$ și calculează $DM = 3\sqrt{5}\text{ cm}$		1p
Aplică Teorema lui Pitagora în $\triangle PDM$ și calculează $PM = 3\sqrt{6}\text{ cm}$		1p
Analog $MN = PN = 3\sqrt{6}\text{ cm}$ și deduce $\triangle MNP$ - echilateral		1p
$A_{\triangle MNP} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2$		1p
b) Fie $CO \perp (MNP) \Rightarrow O$ - centrul cercului circumscris triunghiului echilateral MNP ($CP = CM = CN$) $(MNP) \cap (MNC) = MN$ Fie $OQ \perp MN \Rightarrow CQ \perp MN$ $m(\angle(MNP), (MNC)) = m(\angle CQO)$		2p
$\sin(\angle CQO) = \frac{CO}{CQ} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{14}}{2}} = 2\sqrt{\frac{3}{14}}$		1p
4. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată de bază ABC . Punctul M este mijlocul muchiei BC , măsura unghiului dintre dreptele SM și SA este egală cu 90° și $SA = 6\sqrt{2}\text{ cm}$. a) Arătați că triunghiul SAC este dreptunghic. b) Fie A', B' mijloacele muchiilor SA , respectiv SB , iar P și Q proiecțiile punctelor A' și respectiv B' pe planul (ABC) . Calculați aria triunghiului CPQ .		
a) Notăm $AB = AC = BC = x$		
Aplică Teorema Pitagora în $\triangle SMC : SM^2 = 72 - \frac{x^2}{4}$.		1p
Aplică Teorema lui Pitagora în $\triangle SAM$ și deduce că $x = 12\text{ cm}$.		1p
Aplică reciproca Teoremei lui Pitagora în $\triangle SAC$		1p
b) $A'P \perp (ABC), B'Q \perp (ABC), SO \perp (ABC) \Rightarrow A'P \parallel B'Q \parallel SO \Rightarrow$ $\Rightarrow A'P$ - linie mijlocie în $\triangle SAO \Rightarrow P$ este mijlocul lui $[AO]$ $B'Q$ - linie mijlocie în $\triangle SBO \Rightarrow Q$ este mijlocul lui $[BO]$		1p
$\Rightarrow A'P = B'Q \Rightarrow A'B'QP$ - paralelogram $\Rightarrow PQ = A'B' = \frac{AB}{2} = 6\text{ cm}$		1p

	Fie $CN \perp PQ$, $CN = CO + NO = \frac{2}{3} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$.	1p
	$A_{CPQ} = \frac{PQ \cdot CN}{2} = \frac{6 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ cm}^2$	1p