BAREM - OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală- 2024
CLASA a V-a

PROBLEMA 1

Aflați cifrele a, b, c, n știind că $\overline{abc} \cdot n = \overline{2abc}$.

(7puncte)

Soluție:

$\overline{abc} \cdot n = 2000 + \overline{abc}$ .... $2\,p$

$\overline{abc} \cdot (n-1) = 2000$ .... $2\,p$

$n - 1 = 8 \Rightarrow \overline{abc} = 250, n = 9$ .... $1\,p$

$n - 1 = 5 \Rightarrow \overline{abc} = 400, n = 6$ .... $1\,p$

$n - 1 = 4 \Rightarrow \overline{abc} = 500, n = 5$ .... $1\,p.$

PROBLEMA 2

a) Calculați numărul $x = 8 + 24 + 40 + \ldots + 264$. **(3 puncte)**
b) Arătați că numărul $y = (17 \cdot x)^{2024}$ este un cub perfect. **(4 puncte)**

Soluție:

a)

$x = 8 \cdot (1 + 3 + 5 + \cdots + 33)$ .... $1p$

$x = 8 \cdot \dfrac{34 \cdot 17}{2}$ .... $1p$

$x = 2312$ .... $1p.$

b)

$x = 8 \cdot 17^2, y = (17 \cdot 8 \cdot 17^2)^{2024}$ 1p

$y = (2^3 \cdot 17^3)^{2024}$ 1p

$y = [(2 \cdot 17)^3]^{2024}$ 1p

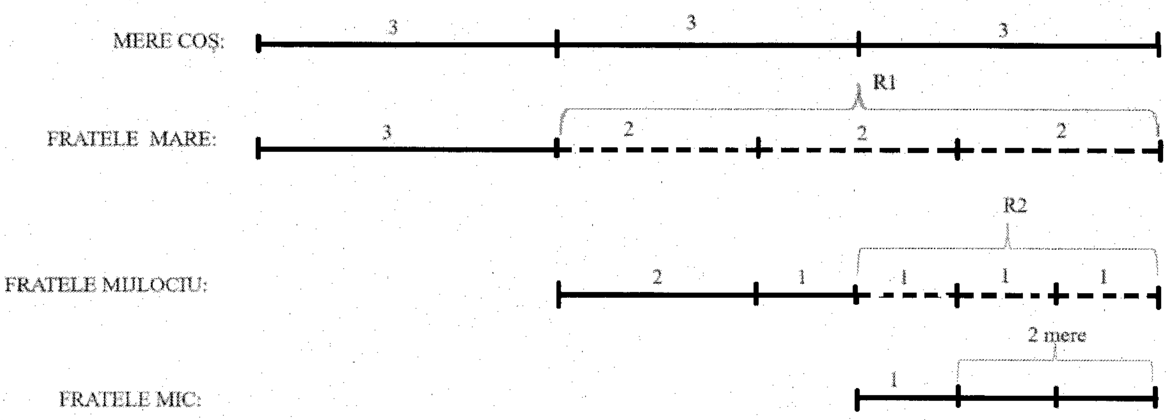
$y = [(2 \cdot 17)^{2024}]^3$ .... 1p.

PROBLEMA 3

Mama a spus celor trei fii ai săi să împartă merele dintr-o fructieră astfel: fiul cel mare să ia o treime din numărul merelor, mijlociul să ia o treime din ce a rămas plus un măr, iar cel mic să ia o treime din ce a găsit plus ultimele două mere. A împărţit mama merele în mod egal ? Justificaţi răspunsul.

(7puncte)

Soluție:



Ultimele două mere reprezintă $\frac{2}{3}$ din restul R2 $\Rightarrow$ R2=3 mere.

Deci, fratele cel mic a luat 3 mere. 2p

3+1 =4 mere reprezintă $\frac{2}{3}$ din restul R1 $\Rightarrow$ R1=4:2·3=6 mere

Deci, fratele mijlociu a luat 6:3+1=3 mere 2p

6 mere reprezintă $\frac{2}{3}$ din numărul merelor din coș.

Deci, fratele cel mare a luat 6:2=3 mere 2p

$\Rightarrow$ Mama a împărțit în mod egal merele 1p

PROBLEMA 4

Se consideră tabloul:

1				
2	4			
5	7	9		
10	12	14	16	
17	19	21	23	25

....

a) Care este ultimul număr din rândul 2024? Justificaţi răspunsul. **(3 puncte)**

b) Care este primul număr din rândul 2023? Justificaţi răspunsul. **(4 puncte)**

(G.M)

Soluție:

a) Observăm că: ultimul număr de pe rândul 1 este $1=1^2$, ultimul număr de pe rândul 2 este $4=2^2$, ultimul număr de pe rândul 3 este $9=3^2$, etc..........................1p
Deci, ultimul număr de pe rândul 2024 este 2024^2 ....1p
$2024^2=4096576$ ....1p.

b) Observăm că primul număr din fiecare rând, începând cu a doilea, este succesorul ultimului număr din rândul anterior 1p
Rândul 2022 are ultimul număr 2022^2 ....1p
Deci, rândul 2023 are primul număr 2022^2+1 ....1p
$2022^2+1=4088485$ ....1p.

BAREM - OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală- 2024
CLASA a VI-a

PROBLEMA 1

Determinați numerele naturale nenule m și n astfel încât $(3m-2)(5m-1)=6^n$.

(7puncte)

Soluție:

$(3m-2)(5m-1)=2^n\cdot 3^n$ **1p**

$3\nmid 3m-2 \Rightarrow 3m-2=2^x$ și $5m-1=2^y\cdot 3^n, x+y=n, n\in\mathbb{N}^*$ **1p**

$3m=2^x+2, 5m=2^y\cdot 3^n+1 \Rightarrow 15m=5\cdot 2^x+10, 15m=2^y\cdot 3^{n+1}+3 \Rightarrow$

$5\cdot 2^x+10=2^y\cdot 3^{n+1}+3 \Rightarrow 5\cdot 2^x+7=2^y\cdot 3^{n+1} \Rightarrow 2^y\cdot 3^{n+1}-5\cdot 2^x=7$ **1p**

$\Rightarrow 2^y(3^{n+1}-5\cdot 2^{x-y})=7 \Rightarrow 2^y=1 \Rightarrow y=0$ și x=n........ **2p**

$3^{n+1}-5\cdot 2^n=7 \Rightarrow n=2$ **1p**

$5m=3^2+1 \Rightarrow m=2$ **1p**

PROBLEMA 2

Fie numărul n = 2024^3.

a) Să se descompună numărul n în factori primi. **(2 puncte)**

b) Să se demonstreze că oricum am alege 9 divizori naturali ai numărului n, între ei există doi al căror produs este pătrat perfect. **(3 puncte)**

c) Să se afle cel mai mic număr natural nenul m astfel încât oricum am alege m divizori ai numărului n între ei să existe doi a căror produs să nu fie pătrat perfect. **(2 puncte)**

Soluție:

a) $n=2024^3=2^9\cdot 11^3\cdot 23^3$ 2p

b) Un divizor al lui n este de forma $2^x\cdot 11^y\cdot 23^z$, unde y, z sunt numere naturale mai mici sau egale cu 3 iar x număr natural mai mic sau egal cu 9.
Fie $d_1=2^x\cdot 11^y\cdot 23^z$ și $d_2=2^a\cdot 11^b\cdot 23^c$ atunci $d_1\cdot d_2=2^{x+a}\cdot 11^{y+b}\cdot 23^{z+c}$ este pătrat perfect dacăși numai dacă $x+a, y+b, z+c$ sunt pare adică x și a au aceeași paritate, y și b au aceeași paritate respectiv z și c au aceeași paritate 1p
Divizorii lui n sunt de forma $2^x\cdot 5^y\cdot 101^z$, în funcție de paritățile lui x, y, z avem 8 grupe posibile:
(1) *x-par, y-par, z-par*; (2) *x-par, y-impar, z-par*; (3) *x-impar, y-par, z-par*;
(4) *x-impar, y-impar, z-par*; (5) *x-par, y-par, z-impar*; (6) *x-par, y-impar, , z-impar*;
(7) *x-impar, y-par, z-impar*; (8) *x-impar, y-impar, z-impar* 1p
Deci oricum am alege 9 divizori între ei există doi care se află în aceeași grupă deci produsul lor este pătratperfect 1p

c) De la 0 până la 3 avem 2 numere pare și 2 numere impare, iar de la 0 până la 9 avem 5 numere pare și 5 numere impare, avem 5· 2 · 2 adică 20 exponenți pari și 20 exponenti

impari
Dacă am alege cel mult 20 divizori ar fi posibil ca toți să fie din aceeași grupă deci produsul oricăror doi săfie pătrat perfect 1p
Oricum alegem 21 vor exista cel puțin doi care să se afle în grupe diferite deci produsul lor nu va fi pătrat perfect. Deci $m = 21$ 1p

PROBLEMA 3

Dacă $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{2024} \in \mathbb{N}^*$ verifică egalitatea:
$\frac{1}{1+2023\cdot n_1} + \frac{1}{1+2023\cdot\cdot n_2} + \cdots + + \frac{1}{1+2023\cdot n_{2024}} = 1$, calculați
$\frac{n_1}{2023+n_2} + \frac{n_2}{2023+n_3} + \cdots + \frac{n_{2024}}{2023+n_1}$.

(7puncte)

Soluție:

Avem succesiv $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{2024} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, \dots, n_{2024} \geq 1 \Rightarrow$ **1p**
$2023 \cdot n_1 \geq 2023, 2023 \cdot n_2 \geq 2023, \dots, 2023 \cdot n_{2024} \geq 2023 \Rightarrow$
$1 + 2023 \cdot n_1 \geq 2024, 1 + 2023 \cdot n_2 \geq 2024, \dots, 1 + 2023 \cdot n_{2024} \geq 2024$ **1p**
$\frac{1}{1+2023\cdot n_1} + \frac{1}{1+2023\cdot n_2} + \cdots + \frac{1}{1+2023\cdot n_{2024}} \leq \frac{1}{2024} + \frac{1}{2024} + \cdots + \frac{1}{2024} = \frac{2024}{2024} = 1$ **2p**
Cum egalitatea are loc $\Rightarrow \frac{1}{1+2023\cdot n_1} = \frac{1}{2024}$ și analoagele
$\Rightarrow n_1 = n_2 = \cdots = n_{2024} = 1$ **2p**
Deci $\frac{n_1}{2023+n_2} + \frac{n_2}{2023+n_3} + \cdots + \frac{n_{2024}}{2023+n_1} = \frac{1}{2024} + \frac{1}{2024} + \cdots + \frac{1}{2024} = \frac{2024}{2024} = 1$ **1p**

PROBLEMA 4

Se consideră 4 unghiuri ∢AOB. ∢BOC, ∢COD și ∢DOA în jurul punctului O. Știind că măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor COD și DOA este de 95^0, măsura ∢COD este două treimi din măsura ∢AOD și suplementul unghiului ∢AOB este egal cu complementul unghiului ∢BOC, să se afle măsurile celor 4 unghiuri.

(7 puncte)

Soluție:

Desen **1p**
Ducem [OM bisectoarea unghiului COD și [ON bisectoarea unghiului AOD.
$\sphericalangle MON = 95^0 \Leftrightarrow \sphericalangle MOD + \sphericalangle DON = 95^0 \Leftrightarrow \sphericalangle COD + \sphericalangle AOD = 190^0 \Rightarrow \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 170^0$
.... **1p**
Notăm m($\sphericalangle AOB$)= x și m($\sphericalangle BOC$)= y. Deci $x + y = 170^0$ **1p**
$180^0 - x = 90^0 - y \Leftrightarrow 180^0 = 90^0 + x - y \Leftrightarrow 180^0 - 90^0 = x - y \Leftrightarrow x - y = 90^0$ **1p**

Din $x+y=170^0$ şi $x-y=90^0$ rezultă că $x=130^0$ şi $y^0=40^0$.
Deci $\sphericalangle AOB=130^0$ și $\sphericalangle BOC=40^0$ **1p**

$\sphericalangle COD+\sphericalangle AOD=190^0$ și $\sphericalangle COD=\frac{2}{3}\sphericalangle AOD \Leftrightarrow \sphericalangle AOD=114^0$și $\sphericalangle COD=76^0$ **2p**

BAREM - OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală- 2024

SOLUTII SI BAREM ORIENTATIV-clasa aVII-a

Subiectul 1

a) $a=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n(n-1)}}$, $n\in\mathbb{N}, n>3$

$a=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(n-1)}}-\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n(n-1)}}$ **(1 p)**

Se simplifică fiecare fracţie prin numărătorul său şi se obţine:

$a=\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(n-1)}}-\frac{1}{\sqrt{n}}$, se reduc termenii opuşi şi se obţine:

(1 p)

$a=\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{n}}\in\mathbb{Q}$ dacă $n=p^2$ **(1 p)**

b) $n=6561=81^2\Rightarrow a=\frac{1}{1}-\frac{1}{81}=\frac{80}{81}$ **(1p)**

$9(x\sqrt{a}-8)=4y(\sqrt{5}+1)$ devine $9\left(x\sqrt{\frac{80}{81}}-8\right)=4y(\sqrt{5}+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow 9\left(x\frac{4\sqrt{5}}{9}-8\right)=4\sqrt{5}y+4y\Rightarrow 4\sqrt{5}x-72=4\sqrt{5}y+4y\Rightarrow$ **(1 p)**

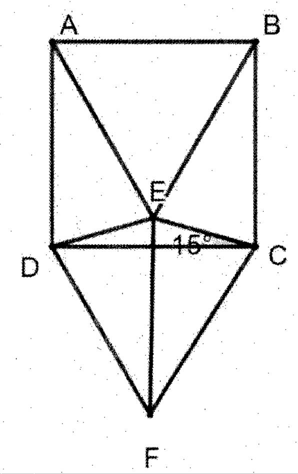
$\Rightarrow 4\sqrt{5}(x-y)=4y+72\Rightarrow\sqrt{5}(x-y)=y+18$

$$\left.\begin{array}{c}\sqrt{5}(x-y)=y+18\\ \sqrt{5}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ x-y,y+18\in\mathbb{Q}\end{array}\right\}\Rightarrow x-y=0 \text{ şi } y+18=0$$ **(1 p)**

Se obţine $x=y=-18\in\mathbb{Q}$ **(1 p)**

SUBIECTUL 2

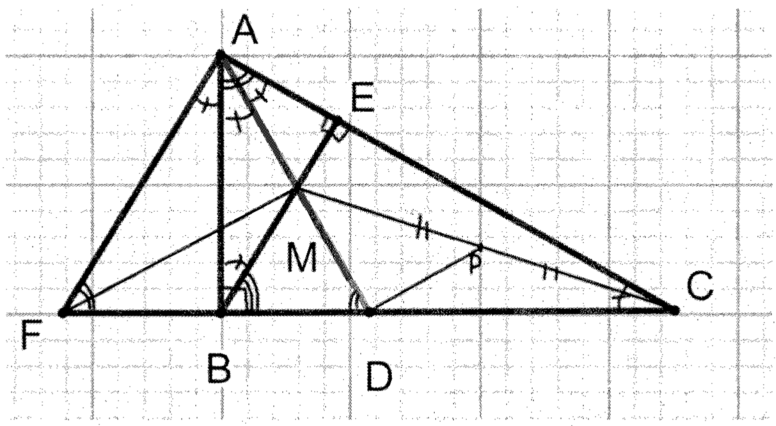
Demonstrăm că $\Delta ADE \equiv \Delta BCE \Longrightarrow AE \equiv BE$ (1) **(1p)**
ΔDCE este isoscel cu $\sphericalangle DEC = 150^O \Longrightarrow \sphericalangle EDC = 15^O$
$\Longrightarrow \sphericalangle ADE = 75^O$ (2) **(1p)**
Construim ΔDCF echilateral în exteriorul pătratului **(1p)**
$\left.\begin{matrix} DE \equiv EC \\ DF \equiv CF \end{matrix}\right\} \Longrightarrow EF$ este mediatoarea segmentului DC deci și bisectoarea unghiurilor $\sphericalangle DEC = 150^O$ *și* $\sphericalangle DFC = 60^O$
$\Longrightarrow \sphericalangle DEF = 75^O = \sphericalangle ADE = \sphericalangle EDF$ (din (2)) **(1p)**
$\left.\begin{matrix} \Longrightarrow DF \equiv EF \equiv DC \equiv AD \\ Cum\ EF \perp DC \text{ și } AD \perp DC \Longrightarrow AD \parallel EF \end{matrix}\right\} \Longrightarrow ADFE\ este$
romb⟹AD≡AE≡BE≡AB (din (1) și ABCD pătrat) **(2p)**
⟹ ΔABE este echilateral **(1p)**



SUBIECTUL 3

$$\left.\begin{matrix} Fie\ F \in BC \text{ încât } \sphericalangle BAF = 30^O \\ AD\ este\ bisectoarea\ \sphericalangle BAC = 60^o \Longrightarrow \sphericalangle DAC = \sphericalangle DAB = 30^O \\ \sphericalangle ABC = 90^o \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \Delta AFD\ e\ echil.$$

(2 p)



(1 p)

$\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACD = 30^O \Longrightarrow \Delta ADC$ este isoscel de bază AC ⟹ AD=DC=DF=AF(1)

$$\left.\begin{matrix} \text{Din } \Delta ABE \text{ dreptunghic cu } \sphericalangle BAE = 60^o \Longrightarrow \sphericalangle ABE = 30^o \Longrightarrow \sphericalangle CBE = 60^o \\ \sphericalangle BDA = 60^o \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \Delta MBD$ este echilateral $\Longrightarrow MD = MB = BD = \frac{DF}{2} = \frac{AD}{2}$ ⟹FM este mediană, înălțime, bisectoare în ΔAFD ecchilateral $\Longrightarrow FM = AB = \frac{AC}{2}$ (teor. $\sphericalangle 30^o$) **(3 p)**

Din (1) și P mijlocul lui MC ⟹ PD este linie mijlocie în $\Delta FMC \Longrightarrow DP = \frac{FM}{2} = \frac{AB}{2} == \frac{AC}{4} \Longrightarrow AC = 4DP$ **(1 p)**

SUBIECTUL 4

a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}\ |\cdot 2 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a - \sqrt{ab} + b - \sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a}^2 - \sqrt{ab} + \sqrt{b}^2 - \sqrt{ab} \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - \sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ ceea ce este adevărat $\forall a, b \in (0, +\infty)$

b) $2\sqrt{x-4} + \sqrt{2(y-2)} + \sqrt{z-1} \leq \frac{x+y+z}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4(x-4)} + \sqrt{2(y-2)} + \sqrt{z-1} \leq \frac{x+y+z}{2}$$

Aplicăm rezultatul de la puncul a):

$$\sqrt{4(x-4)} \leq \frac{4+x-4}{2}$$

$$\sqrt{2(y-2)} \leq \frac{2+y-2}{2}$$

$$\sqrt{z-1} = \sqrt{1(z-1)} \leq \frac{1+z-1}{2}$$

Adunând inegalitățile se obține relația din enunț.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
10.02.2024
CLASA a VIII-a

Barem orientativ de notare

Problema 1. Arătați că dacă x și y sunt numere reale pozitive care verifică relația $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2023}$ și $A=\sqrt{\left(\frac{x}{7}-289\right)\left(\frac{y}{7}-289\right)}$, atunci $\sqrt{A}$ este număr natural.

(S.G.M. nr. 9/2023)

Soluție:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2023} \Rightarrow \frac{1}{2023}-\frac{1}{x}=\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{x-2023}{2023x}=\frac{1}{y}$	1p
$\Rightarrow x-2023=\frac{2023x}{y}$ și $y-2023=\frac{2023y}{x}$	2p
$A=\sqrt{\left(\frac{x}{7}-289\right)\left(\frac{y}{7}-289\right)}=\sqrt{\left(\frac{x-2023}{7}\right)\left(\frac{y-2023}{7}\right)}=$	1p
$=\sqrt{\frac{\frac{2023x}{y}}{7}\cdot\frac{\frac{2023y}{x}}{7}}=$	1p
$=\sqrt{\frac{2023^2}{49}}=\frac{2023}{7}$	1p
$=289 \in \mathbb{N}.$	1p

Problema 2. a) Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-1| \leq 5\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -2 \leq \frac{2-3x}{2} \leq 7\right\}$. Calculați $A \cap B$ și $A - B$.

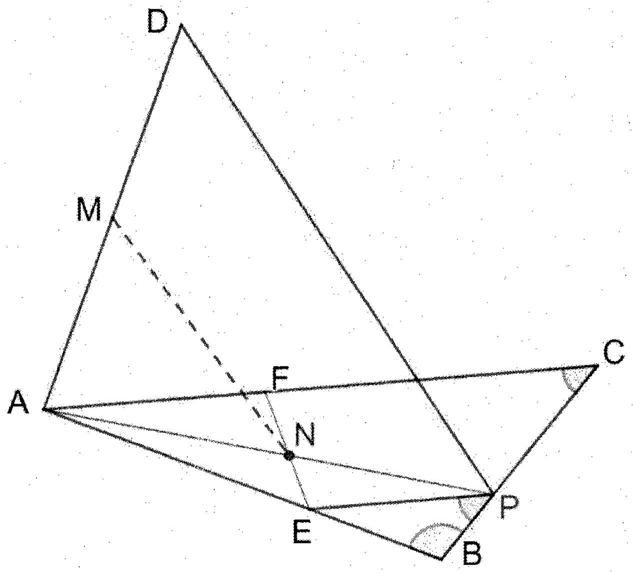
b) Determinați numerele reale x și y știind că îndeplinesc simultan condițiile: $x < 2 < y$ și $|x-y-2| = x^2 + y^2 - 4y + \frac{17}{2}$.

Soluție:

a) $\|2x-1\| \leq 5 \Leftrightarrow x \in [-2;3]$ și $-2 \leq \frac{2-3x}{2} \leq 7 \Leftrightarrow x \in [-4;2]$	1p
$A \cap B = [-2;2]$ și $A - B = (2;3]$	1p
b) $x < 2 < y \Rightarrow \|x-y-2\| = -x+y+2$	1p
$-x+y+2 = x^2+y^2-4y+\frac{17}{2}$ $\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+\frac{17}{2}+x-y-2=0$	1p
$x^2+x+\frac{1}{4}+y^2-5y+\frac{25}{4}=0$ $\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=0$	1p
$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}<2$	1p
$\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=0 \Leftrightarrow y=\frac{5}{2}>2$	1p

Problema 4. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AB \equiv AC$ și $E \in AB, F \in AC$ astfel încât $AE \equiv CF$. Arătați că dreapta determinată de mijloacele segmentelor AD și EF este paralelă cu planul (BCD).

Soluție:



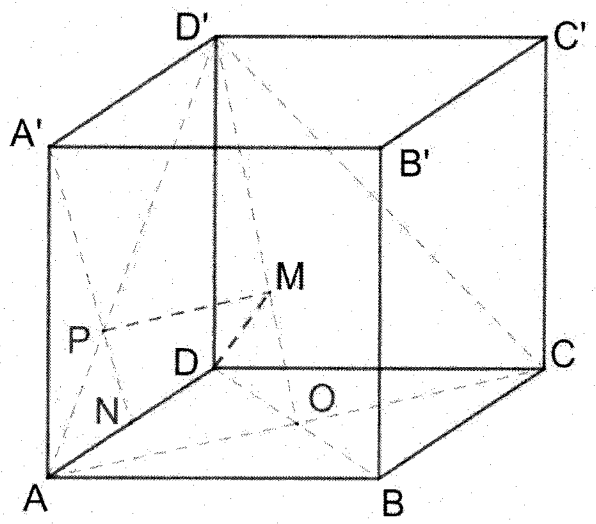
Notăm cu M și N mijloacele segmentelor AD, respectiv EF. Cum ΔABC isoscel de bază $BC \Longrightarrow \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ABC$ $AB \equiv AC$ și $AE \equiv CF \Longrightarrow AF \equiv EB$	1p
Fie $EP \parallel AC, P \in AC \Longrightarrow \sphericalangle EPB \equiv \sphericalangle ACB$	1p
Dar $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ABC \Longrightarrow \sphericalangle EPB \equiv \sphericalangle ABC \Longrightarrow \Delta EBP$ isoscel $\Longrightarrow$ $EB \equiv EP$	1p
Cum $EB \equiv EP$ și $AF \equiv EB \Longrightarrow EP \equiv AF$, dar $EP \parallel AF \Longrightarrow AEPF$ paralelogram	1p
$AEPF$ paralelogram și N mijlocul lui $EF \Longrightarrow N$ mijlocul lui AP	1p
MN linie mijlocie în triunghiul $APD \Longrightarrow MN \parallel DP$	1p
$MN \parallel DP, DP \subset (BCD) \Longrightarrow MN \parallel (BCD)$	1p

Problema 3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 6$ cm se construiește $DM \perp (ACD'), M \in (ACD')$. Fie N mijlocul lui AD și $A'N \cap AD' = \{P\}$.

a) Aflați lungimea segmentului DM.

b) Determinați unghiul format de dreptele PM și $C'D'$.

Soluție:



a) $DA \equiv DC \equiv DD'$ și $\Delta ACD'$ echilateral $\Longrightarrow DACD'$ piramidă triunghiulară regulată $DM \perp (ACD'), M \in (ACD') \Longrightarrow DM$ înălțimea piramidei $\Longrightarrow M$ centrul de greutate al triunghiului ACD'	1p
$DO = 3\sqrt{2}$ cm, $D'O = 3\sqrt{6}$ cm	1p
$DM = \frac{DO \cdot DD'}{D'O} = 2\sqrt{3}$ cm.	1p
b) $AN \parallel A'D' \xRightarrow{T.F.A.} \Delta ANP \sim \Delta D'A'P \Longrightarrow \frac{AN}{D'A'} = \frac{AP}{D'P} = \frac{1}{2}$ (relația 1)	1p
M centrul de greutate al triunghiului ACD' și $D'O$ mediană $\Longrightarrow$ $\frac{MO}{MD'} = \frac{1}{2}$ (relația 2)	1p
Din relațiile 1 și 2 $\xRightarrow{R.T.Thales} PM \parallel AO$	1p
$PM \parallel AO$ și $C'D' \parallel CD \Rightarrow \sphericalangle(PM; C'D') = \sphericalangle(AO; CD) = 45°$.	1p