

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 6 martie 2022

CLASA a XI-a – enunțuri

Timp de lucru 180 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A) = i$. Valoarea expresiei $\det(A^{2022}) + \det(iA)$ este:
A 0 B $1 - i$ C $-1 + i$ D i E -2

2. Dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este o soluție a ecuației $x^3 = 1$, atunci determinantul $\begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & 1+z \end{vmatrix}$ are valoarea:
A -1 B 1 C 0 D $-z$ E z

3. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Numărul soluțiilor ecuației $X^3 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este egal cu:
A 0 B 1 C 2 D 3 E 9

4. Suma numerelor reale a și b pentru care dreapta de ecuație $y = ax + b$ este asimptotă oblică la graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$, este egală cu:
A -2 B $-\frac{5}{2}$ C 0 D $\frac{3}{2}$ E $-\frac{1}{2}$

5. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = a$, $x_2 = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ și $x_{n+2} = [x_{n+1}] + \{x_n\}$, pentru orice $n \geq 1$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă și respectiv partea fracționară a numărului real x . Atunci:
A $(x_n)_{n \geq 1}$ nu are limită, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ B $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent $\Leftrightarrow a = b$ C $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$
D $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent $\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$ E $(x_n)_{n \geq 1}$ este monoton $\Leftrightarrow [a] = [b]$.

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Suma elementelor matricei A^{100} este egală cu:

A -300 B -303 C 0 D -297 E -100

7. Limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^{x^2}$ este egală cu:
A e B $\frac{1}{e}$ C 1 D $\frac{1}{\sqrt{e}}$ E e^2

8. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = (0, 1)$ și $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, pentru orice $n \geq 1$. Atunci
A $(x_n)_{n \geq 1}$ nu are limită B $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty$ C $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent
D $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător E $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este monoton

9. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = (0, 1)$ și $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, pentru orice $n \geq 1$. Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ este egală cu:

A 1 B $\frac{1}{2}$ C $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D 0 E ∞

10. Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este definit astfel: $a_1 = \sqrt{3}$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{4}{5^n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

A $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ **B** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ **C** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ **D** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ **E** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

11. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A) = 1$ și $\text{Tr}(A) = -1$. Numărul elementelor mulțimii $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este egal cu:

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 6 **E** ∞

12. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $\det(A) = 4$ și $\text{Tr}(A) = 5$. Notăm $M = \{a \in \mathbb{R} \mid \det(A^4 + aA^2 + 16I_2) = 64\}$. Atunci:

A $M = \{16\}$ **B** $M = \{-19, -15\}$ **C** $M = \{0\}$ **D** $M = \{-10, 9\}$ **E** $M = \{-19\}$

13. Valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 2 & 2 & 2 \\ x & 2 & 4 & 4 \\ x & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, este:

A 2 **B** 6 **C** -1 **D** 3 **E** 4

14. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci A^{2024} este:

A I_2 **B** O_2 **C** $4^{2022}A$ **D** $2^{4048}A$ **E** $4^{2023}A$

15. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Ecuația matriceală $X^{2024} = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, are exact:

A o soluție **B** 2 soluții **C** 2023 soluții **D** 2024 soluții **E** 4048 soluții

16. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $\varepsilon \in \mathbb{C}$ astfel încât $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și

$$\det(A + B) + \det(A + \varepsilon B) + \det(A + \varepsilon^2 B) = 0.$$

Atunci:

A $\det(A) = \varepsilon$ **B** $\det(A) = 1 + \varepsilon$ **C** $\det(A) = 1 + \varepsilon^2$ **D** $\det(A) = \varepsilon^2$ **E** $\det(A) = 0$

17. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z})$, având elementele numere întregi pare pe diagonala principală și numere întregi impare în rest. Atunci numărul elementelor impare ale matricei A^2 este

A 9 **B** 12 **C** 16 **D** 8 **E** 4

18. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_n = \sum_{k=1}^n \left| \frac{k}{n} - \frac{1}{3} \right| - \frac{5n}{18}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

A $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ **B** $(x_n)_{n \geq 1}$ este nemărginit superior **C** $(x_n)_{n \geq 1}$ este nemărginit inferior

D $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{6}$ **E** $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$

19. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este definit prin $x_n = \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1} + \sqrt[3]{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{n}}$, $n \geq 1$.

Atunci:

A $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}$ **B** $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$ **C** $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$ **D** $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ **E** $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[3]{3}$

20. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ și șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $A^n - B^n = x_n(A - B)$.

Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ este:

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 4 **E** ∞

21. Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit recurent prin $a_1 = a > 0$ și $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Limita șirului $x_n = \frac{a_n^2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este:

- A** 0 **B** $\frac{1}{e}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** 1 **E** 2

22. Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit recurent prin $a_1 = a > 0$ și $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Cel mai mic număr real r pentru care șirul $y_n = \frac{a_n}{n^r}$, $n \in \mathbb{N}^*$, are limită finită este:

- A** $\frac{1}{e}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** 1 **D** $\frac{3}{2}$ **E** 2

23. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin relația de recurență $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, cu $x_0 = 0$ și $x_1 = 1$. Notăm $P_n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{x_n^2}$ este:

- A** 2 **B** $2\sqrt{2}$ **C** $1 + \sqrt{2}$ **D** $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ **E** ∞

24. Limita șirului $x_n = \left(\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n} \right)^n$, $n \geq 2$, este

- A** 0 **B** ∞ **C** $1/e$ **D** 1 **E** e