



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

PROBLEMA 1.

$$(2p) \quad S_n = 1 + (11 + 1) + (111 + 1) + \dots + \left(\underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ ori}} + 1 \right)$$

$$(1p) \quad S_n = \left(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ ori}} \right) + n - 1$$

$$(2p) \quad S_n = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^n (10^k - 1) + n - 1$$

$$(2p) \quad S_n = \frac{1}{9} \left(10 \cdot \frac{10^n - 1}{9} - n \right) + n - 1 = S_n = \frac{10^{n+1} + 72n - 91}{81}$$

PROBLEMA 2.

$$(2p) \quad \text{a) Din inegalitatea mediilor, avem: } \sqrt{1 \cdot 2x} \leq \frac{1 + 2x}{2}, \sqrt{1 \cdot 3y} \leq \frac{1 + 3y}{2}, \sqrt{4z} \leq \frac{1 + 4z}{2}$$

$$(1p) \quad \text{de unde, } \sqrt{2x} + \sqrt{3y} + \sqrt{4z} \leq \frac{3 + (2x + 3y + 4z)}{2} = \frac{9}{2}$$

$$(1p) \quad \text{Egalitatea are loc dacă și numai dacă } x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3} \text{ și } z = \frac{1}{4}, \text{ valori care nu verifică relația } 2x + 3y + 4z = 6.$$

$$\text{b) Notăm } S = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z}$$

$$(1p) \quad 6S = (2x + 3y + 4z) \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} \right) = 29 + 6 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 12 \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + 8 \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right)$$

$$(1p) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \text{ pentru } a, b \in (0, +\infty)$$

$$(1p) \quad \text{Deci } 6S \geq 81, \text{ de unde } S \geq \frac{27}{2}. \text{ Egalitatea are loc pentru } x = y = z = \frac{2}{3}.$$

PROBLEMA 3.

(1p) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{4n+2} = \sqrt{2(2n+1)} \notin \mathbb{N}$

(4p) Are loc: $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$

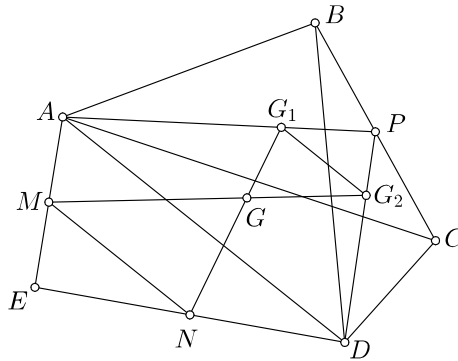
Într-adevăr, relația aceasta este echivalentă cu: $4n+1 < 2n+1+2\sqrt{n(n+1)} < 4n+2 \Leftrightarrow 2n < 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \Leftrightarrow 4n^2 < 4n^2+4n < 4n^2+4n+1$, ceea ce este adevărat.

(2p) Avem $\lceil \sqrt{4n+1} \rceil = \lceil \sqrt{4n+2} \rceil$

Într-adevăr, dacă $\lceil \sqrt{4n+2} \rceil = a \in \mathbb{N}$, atunci $a \leq \sqrt{4n+2} < a+1 \Rightarrow a^2 \leq 4n+2 < (a+1)^2 \Rightarrow a^2 \leq 4n+1 < (a+1)^2 \Rightarrow a \leq \sqrt{4n+1} < a+1 \Rightarrow \lceil \sqrt{4n+1} \rceil = a$.

Așadar, $\lceil \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rceil = \lceil \sqrt{4n+2} \rceil$.

PROBLEMA 4.



(1p) a) Dacă P este mijlocul segmentului $[BC]$, atunci $\frac{PG_1}{PA} = \frac{PG_2}{PD} = \frac{1}{3}$. Deci $G_1G_2 \parallel AD$ și $\frac{G_1G_2}{AD} = \frac{1}{3}$

(1p) $MN \parallel AD$ și $\frac{MN}{AD} = \frac{1}{2}$, deci $G_1G_2 \parallel MN$ și $\frac{G_1G_2}{MN} = \frac{2}{3}$

(1p) În concluzie, pentru $[G_1N] \cap [G_2M] = \{G\}$, avem $\frac{G_1G}{GN} = \frac{G_2G}{GM} = \frac{2}{3}$

(1p) b) Pentru orice punct O din plan, avem $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

(1p) $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$

(1p) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} \cdot \overrightarrow{OG_1} + \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} \cdot \overrightarrow{ON} = \frac{3}{5} \cdot \overrightarrow{OG_1} + \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{ON}$

(1p) Așadar, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.