



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A XII-A
Matematică-informatică

SUBIECTUL 1(7puncte)

Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - i(x + y) - 1 + i$

și, pentru orice număr complex x se notează $x_n = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ de } x}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

(2p) a) Determinați numerele reale a și b pentru care $(3-i) \circ (3+i) = a + bi$.

(2p) b) Determinați elementul neutru al legii " $\circ$ ".

(3p) c) Calculați $(-1+i)^{2020}$.

SUBIECTUL 2(7puncte)

(7p) Să se arate că mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-4y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0, x^2 - 2y^2 = 1 \right\}$ formează o structură de grup în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL 3(7puncte)

Se consideră funcțiile $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \cos x + \sin x$ și $g: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln x$.

(2p) a) Calculați $\int_0^{\pi} f(x) dx$

(2p) b) Calculați $\int_1^e \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx$.

(3p) c) Arătați că numărul $A = \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx$ este întreg.

SUBIECTUL 4(7puncte)

Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}, I_n = \int_n^{n+1} \frac{x}{1+x^2} dx$.

(2p) a) Arătați că $I_0 < \frac{1}{2}$.

(2p) b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

(3p) c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot I_n$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.