

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VIII-a

1. Se consideră expresia $E(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$, cu x număr real.

a) (2p) Arătați că $E(x) + 1 = (x^2 - 5x + 5)^2$, pentru orice x număr real.

b) (5p) Demonstrați că $E(n)$ este divizibil cu 24, pentru orice n număr întreg.

prof. Gheorghe Iacoviță, Frătăuții Vechi

Soluție:

a) $(x^2 - 5x + 5)^2 = x^4 + 25x^2 + 25 - 10x^3 - 50x + 10x^2 = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 + 1 = E(x) + 1.$

b) $E(n) = (n^2 - 5n + 5)^2 - 1 = (n^2 - 5n + 4)(n^2 - 5n + 6) = (n-1)(n-4)(n-2)(n-3) =$
 $= (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)$

$n-4, n-3, n-2, n-1$ sunt patru numere întregi consecutive, atunci cel puțin unul este divizibil cu 3, deci produsul lor este divizibil cu 3. Dintre patru numere întregi consecutive, unul se divide cu 2 și altul cu 4, deci produsul lor se divide cu 8.

Din $E(n):3, E(n):8$ și $(3,8)=1$, obținem $E(n):24$, pentru orice n număr întreg.

Barem:

Calculează $(x^2 - 5x + 5)^2 = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 + 1 = E(x) + 1$	2p
Scrie $E(n) = (n^2 - 5n + 4)(n^2 - 5n + 6) = (n-1)(n-4)(n-2)(n-3)$	2p
Dintre patru numere întregi consecutive, atunci cel puțin unul este divizibil cu 3, deci produsul lor este divizibil cu 3.	1p
Dintre patru numere întregi consecutive, unul se divide cu 2 și altul cu 4, deci produsul lor se divide cu 8.	1p
$E(n):3, E(n):8$ și $(3,8)=1$, obținem $E(n):24$, pentru orice n număr întreg.	1p

2. a) (2p) Arătați că pentru orice numere reale $x, y, z > 0$ este adevărată relația $x^2y + z \geq 2x\sqrt{yz}$.

b) (5p) Demonstrați că $\frac{x}{x^2y + z} + \frac{y}{y^2z + x} + \frac{z}{z^2x + y} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$, oricare ar fi numerele reale $x, y, z > 0$.

Gazeta Matematică Nr. 10/2018

Soluție:

a) $x^2y + z \geq 2x\sqrt{yz} \Leftrightarrow x^2y + z - 2x\sqrt{yz} \geq 0 \Leftrightarrow (x\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \geq 0$ (adevărată), pentru orice numere reale $x, y, z > 0$.

b) Aplicăm inegalitatea de la punctul a) și obținem relațiile:

$$x^2y + z \geq 2x\sqrt{yz} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2y + z} \leq \frac{1}{2\sqrt{yz}}$$

$$y^2z + x \geq 2y\sqrt{zx} \Leftrightarrow \frac{y}{y^2z + x} \leq \frac{1}{2\sqrt{zx}}$$

$$z^2x + y \geq 2z\sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{z}{z^2x + y} \leq \frac{1}{2\sqrt{xy}}$$

care adunate ne conduc la $\frac{x}{x^2y+z} + \frac{y}{y^2z+x} + \frac{z}{z^2x+y} \leq \frac{1}{2\sqrt{yz}} + \frac{1}{2\sqrt{zx}} + \frac{1}{2\sqrt{xy}} \quad (1)$

Aplicând inegalitatea dintre media geometrică și cea armonică avem:

$$\sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \text{ și analoagele:}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right), \quad \frac{1}{2\sqrt{zx}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) \text{ care adunate ne conduc la:}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{yz}} + \frac{1}{2\sqrt{zx}} + \frac{1}{2\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{4} \cdot 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (2)$$

Din (1) și (2) obținem $\frac{x}{x^2y+z} + \frac{y}{y^2z+x} + \frac{z}{z^2x+y} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$, pentru orice numere reale $x, y, z > 0$.

Barem:

a) $x^2y+z \geq 2x\sqrt{yz} \Leftrightarrow x^2y+z-2x\sqrt{yz} \geq 0 \Leftrightarrow (x\sqrt{y}-\sqrt{z})^2 \geq 0$ (adevărată), pentru orice numere reale $x, y, z > 0$.	2p
b) Aplică inegalitatea de la punctul a) și arată că: $\frac{x}{x^2y+z} + \frac{y}{y^2z+x} + \frac{z}{z^2x+y} \leq \frac{1}{2\sqrt{yz}} + \frac{1}{2\sqrt{zx}} + \frac{1}{2\sqrt{xy}}$	3p
Aplică inegalitatea mediilor și arată că $\frac{1}{2\sqrt{yz}} + \frac{1}{2\sqrt{zx}} + \frac{1}{2\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$.	2p
Finalizare.	

3. În vârful A al pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara AP . Dacă M este piciorul perpendicularei din B pe PC și $AP = AB = a$, să se determine:

a) (5p) măsura unghiului format de dreapta BM cu planul (POM) , unde O este centrul pătratului $ABCD$;

b) (2p) distanța dintre dreptele PC și BD .

prof. Stela Boghian, Suceava

Soluție: **a)** $(POM) = (PAC)$ și $BM \perp PC$, cu $M \in PC$.

$$m(\angle(BM, (POM))) = m(\angle(BM, pr_{(PAC)}BM))$$

$$\text{Cum } M \in (PAC) \Rightarrow pr_{(PAC)}M = M.$$

$$ABCD \text{ pătrat} \Rightarrow AC \perp BD, \quad OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Din } PA \perp (ABCD) \text{ și } BD \subset (ABCD) \Rightarrow PA \perp BD.$$

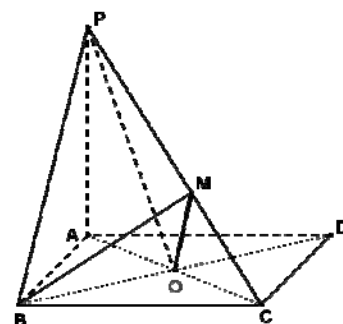
$$\text{Din } BO \perp AC, \quad BO \perp PA, \quad AC \cap PA = \{A\} \text{ și } AC, PA \subset (PAC)$$

$$\Rightarrow BO \perp (PAC), \text{ dar } O \in (PAC) \Rightarrow pr_{(PAC)}B = O.$$

$$\text{Atunci } pr_{(PAC)}BM = OM \text{ și } m(\angle(BM, (POM))) = m(\angle(BM, MO)) = m(\angle(BMO)).$$

$$\text{Din } BO \perp (PAC) \text{ și } MO \subset (PAC) \Rightarrow BO \perp OM.$$

$$\text{Din } PA \perp (ABCD), \quad AB \perp BC \text{ și } AB, BC \subset (ABCD) \xRightarrow{T_{3\perp}} PB \perp BC \Rightarrow \triangle PBC \text{ dreptunghic în } B \Rightarrow$$



$$BM = \frac{BP \cdot BC}{PC}.$$

Din $PA \perp (ABCD)$ și $AB \subset (ABCD) \Rightarrow PA \perp AB$. Din $\triangle PAB$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow PB = a\sqrt{2}$.

Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle PBC$ obținem $PC = a\sqrt{3}$. Atunci $BM = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$$\text{În } \triangle BOM \text{ dreptunghic în } O \text{ avem: } \sin(\sphericalangle BMO) = \frac{BO}{BM} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle BMO) = 60^\circ.$$

Deci, $m(\sphericalangle(BM, (POM))) = m(\sphericalangle(BMO)) = 60^\circ$.

b) Din $BO \perp (PAC)$, $BM \perp PC$ și $OM, PC \subset (PAC) \xRightarrow{R_2 T_{31}} OM \perp PC$.

Cum $OM \perp BD$, $OM \perp PC \Rightarrow \text{dist}(BD, PC) = MO$.

Din $\triangle BOM$ obținem $OM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Barem:

a) Figura	1p
Arată că $m(\sphericalangle(BM, (POM))) = m(\sphericalangle(BM, pr_{(PAC)} BM)) = m(\sphericalangle(BM, MO)) = m(\sphericalangle(BMO))$	2p
Determină $m(\sphericalangle(BMO)) = 60^\circ$	2p
b) Arată că $OM \perp BD$, $OM \perp PC \Rightarrow \text{dist}(BD, PC) = MO$.	1p
Calculează $OM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$	1p

4. (7p) Fie $ABCD$ un patrulater convex și $M \notin (ABCD)$ astfel încât $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle CMD$ și $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle MCD$. Se consideră punctele $P \in MB$, $Q \in MC$ astfel încât $AP + PC$ și $BQ + QD$ să fie minime. Arătați că $PQ \parallel (ABCD)$.

prof. Claudia Marchitan, Suceava

Soluție: Din $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle CMD$ și

$\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle MCD}$ avem:

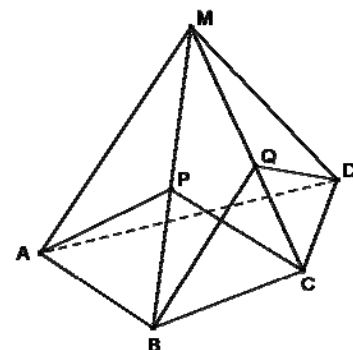
$\triangle MAB \sim \triangle MBC \sim \triangle MCD$ iar de aici obținem

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MB}{MC} = \frac{MC}{MD} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MD}.$$

Din $AP + PC$ și $BQ + QD$ să fie minime, cu $P \in MB$, $Q \in MC$ obținem că $P \in AC$ și $Q \in BD$ pe desfășurarea suprafeței laterale a piramidei $MABCD$.

Pe desfășurare avem $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MD}$ și $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle BMD$ (sumă de unghiuri congruente) de unde obținem că:

$\triangle AMC \sim \triangle BMD \Rightarrow \sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MBD$. Dar $\sphericalangle AMP \equiv \sphericalangle BMQ$ și atunci:

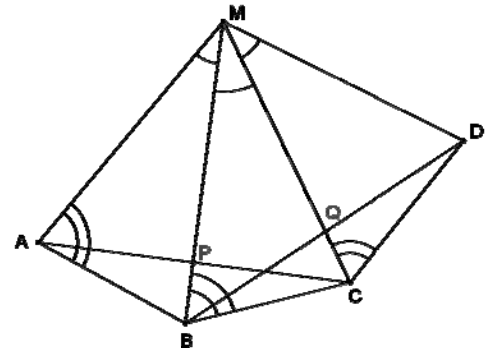


$$\Delta AMP \sim \Delta BMQ \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MP}{MQ}. \text{ Dar } \frac{MA}{MB} = \frac{MB}{MC} \text{ și avem}$$

$$\frac{MB}{MC} = \frac{MP}{MQ} \Leftrightarrow \frac{MQ}{MC} = \frac{MP}{MB}.$$

$$\text{Deci în } \Delta MBC \text{ avem } \frac{MQ}{MC} = \frac{MP}{MB} \Rightarrow PQ \parallel BC.$$

Din $PQ \parallel BC$, $BC \subset (ABCD)$, $PQ \not\subset (ABCD)$ obținem $PQ \parallel (ABCD)$.



Barem:

Arată că $\Delta MAB \sim \Delta MBC \sim \Delta MCD$ iar de aici obține $\frac{MA}{MB} = \frac{MB}{MC} = \frac{MC}{MD}$	1p
Arată că $P \in AC$ și $Q \in BD$ pe desfășurarea suprafeței laterale a piramidei $MABCD$.	2p
Arată că $\Delta AMC \sim \Delta BMD \Rightarrow \sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MBD$	1p
Arată că $\Delta AMP \sim \Delta BMQ$ și apoi că $\frac{MQ}{MC} = \frac{MP}{MB} \Rightarrow PQ \parallel BC$.	2p
$PQ \parallel BC$, $BC \subset (ABCD)$, $PQ \not\subset (ABCD)$ obținem $PQ \parallel (ABCD)$.	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.