

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014

CLASA a VII-a

1. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $m(\angle A) < 90^\circ$. Dacă $AM \perp BC$, $M \in BC$, $AQ \perp CD$, $Q \in CD$, $CN \perp AB$, $N \in AB$ și $CP \perp AD$, $P \in AD$, atunci demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi.

Daniela Tilincă și Adriana Mihăilă, Brăila

Soluție:

$$\triangle DPC \equiv \triangle AMB (I.U.) \Rightarrow PC = AM; \angle PCD \equiv \angle BAM; DP = BM \quad 1p$$

$$\triangle QAD \equiv \triangle BCN (I.U.) \Rightarrow CN = QA; \angle QAD \equiv \angle BCN; QD = BN \quad 1p$$

$$\triangle PCN \equiv \triangle QAM (L.U.L.) \Rightarrow QM = PN (1) \quad 2p$$

$$\triangle QDP \equiv \triangle MBN \Rightarrow QP = MN (2); \text{din } (1)+(2) \Rightarrow MNPQ \text{ paralelogram}$$

$$AQCN \text{ dreptunghi} \Rightarrow QN = AC (3) \quad 1p$$

$$AMCP \text{ dreptunghi} \Rightarrow PM = AC (4) \quad 1p$$

$$\text{din relațiile } (3)+(4) \Rightarrow QN = PM \Rightarrow MNPQ \text{ dreptunghi} \quad 1p$$

2. Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ astfel încât $\sqrt{a + \sqrt{ab}} = a$.

Supliment, G.M., noiembrie 2013

Soluție:

$$\sqrt{ab} = a^2 - a = a(a - 1) \quad 3p$$

$$\overline{ab} : 2 \text{ și } \overline{ab} \text{ pătrat perfect} \quad 2p$$

$$\text{Finalizare: } \overline{ab} = 36 \quad 2p$$

3. Fie dreptunghiul $ABCD$ și punctele M pe (AB) , P, Q pe (AD) și R, T pe (BC) . Demonstrați că centrele de greutate ale triunghiurilor MPR, MPT, MQR și MQT sunt coliniare.

Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

Soluție:

E și F mijloacele segmentelor $[MR]$ și $[MT]$ și G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor MPR, MPT, MQR, MQT

$G_1G_2 \parallel EF$ (R.T. Thales) și $BC \parallel EF$ (linie mijlocie) $\Rightarrow G_1G_2 \parallel BC$ **2p**

$G_1G_3 \parallel PQ$ (R.T. Thales) și $BC \parallel PQ$ (linie mijlocie) $\Rightarrow G_1G_3 \parallel BC$ **2p**

$G_2G_4 \parallel PQ$ (R.T. Thales) și $BC \parallel PQ$ (linie mijlocie) $\Rightarrow G_2G_4 \parallel BC$ **2p**

Finalizare: G_1, G_2, G_3, G_4 coliniare **1p**

4. Determinați numerele întregi x și y pentru care:

$$\|x - 3\| + \|y - 2x\| = 3.$$

Supliment, G.M., noiembrie 2013

Soluție:

$$|x - 3| + |y - 2x| = 3 \quad \mathbf{2p}$$

$$|x - 3|, |y - 2x| \in \mathbb{N} \quad \mathbf{1p}$$

$$|x - 3| \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \mathbf{1p}$$

Finalizare:

$$(3, 9); (3, 3); (4, 10); (4, 6); (2, 6); (2, 2); (5, 11); (5, 9); (1, 3); (1, 1); (0, 0); (6, 12) \quad \mathbf{3p}$$