

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică
Clasa a X-a
Craiova, 16 februarie 2014
Soluții

Problema 1.

i) Fie $x \in A_0$. Atunci $f(x) \in f(A_0)$. Din faptul că

$$f^{-1}(f(A_0)) = \{a \in A \mid f(a) \in f(A_0)\},$$

obținem că $x \in f^{-1}(f(A_0))$, deci $A_0 \subseteq f^{-1}(f(A_0))$.

Dacă f este injectivă atunci pentru $x \in f^{-1}(f(A_0))$, avem că $f(x) \in f(A_0)$, de unde deducem că există $a_0 \in A_0$ astfel încât $f(x) = f(a_0)$, deci $x = a_0 \in A_0$. Așadar $f^{-1}(f(A_0)) \subseteq A_0$. Așadar dacă f este injectivă atunci $f^{-1}(f(A_0)) = A_0$.

ii) Dacă $x \in f(f^{-1}(B_0))$ rezultă că $x \in f(\{a \mid f(a) \in B_0\})$, deci $x \in B_0$ și am demonstrat că $f(f^{-1}(B_0)) \subseteq B_0$. Dacă f este surjectivă, din faptul că $x \in B_0$ rezultă că există $a \in A$ astfel încât $f(a) = x$. Obținem astfel că $a \in f^{-1}(B_0)$, deci $x \in f(f^{-1}(B_0))$ și $B_0 \subseteq f(f^{-1}(B_0))$. Așadar dacă f este surjectivă atunci $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$.

Problema 2.

Relațiile din ipoteza se pot rescrie astfel

$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = -1, \quad \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1, \quad \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = \frac{1}{a}.$$

Putem găsi astfel că $\frac{1}{xy} = \frac{1+2a}{2a}$, $\frac{1}{yz} = \frac{1-2a}{2a}$ și $\frac{1}{zx} = -\frac{1}{2a}$. Înmulțind cele trei relații obținem că

$$xyz = \pm \sqrt{\frac{8a^3}{4a^2 - 1}}.$$

Problema 3.

$$\cos a \pm \sqrt{3} \sin a = 2 \left(\frac{1}{2} \cos a \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos a \pm \sin \frac{\pi}{3} \sin a \right) = 2 \cos \left(a \mp \frac{\pi}{3} \right)$$

Mai departe

$$2 - (\cos a \pm \sqrt{3} \sin a) = 2 - 2 \cos \left(a \mp \frac{\pi}{3} \right) = 4 \sin^2 \frac{a \mp \frac{\pi}{3}}{2}.$$

Partea stângă a identității inițiale devine

$$2^x \left| \sin \frac{a - \frac{\pi}{3}}{2} \right|^x + 2^x \left| \sin \frac{a + \frac{\pi}{3}}{2} \right|^x.$$

Partea dreaptă a identității devine

$$2^{\frac{x}{2}+1} \left| \frac{1}{2} - \cos a \right|^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{x}{2}+1} \left| \cos \frac{\pi}{3} - \cos a \right|^{\frac{x}{2}} = 2^{x+1} \left| \sin \left(\frac{a - \frac{\pi}{3}}{2} \right) \right|^{\frac{x}{2}} \left| \sin \left(\frac{a + \frac{\pi}{3}}{2} \right) \right|^{\frac{x}{2}}.$$

Introducând ultimele relații în prima obținem

$$\left[\left| \sin \frac{a - \frac{\pi}{3}}{2} \right|^{\frac{x}{2}} - \left| \sin \frac{a + \frac{\pi}{3}}{2} \right|^{\frac{x}{2}} \right]^2 = 0$$

adică

$$\sin \frac{a - \frac{\pi}{3}}{2} = \pm \sin \frac{a + \frac{\pi}{3}}{2}$$

și

$$a = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Problema 4.

Pentru că $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$ ținând cont că $|z + 1| \geq 2$ este suficient să demonstrăm că $|z^2 - z + 1| \geq \frac{1}{2}$. Dacă vom nota prin $r = |z + 1| \geq 2$ vom avea că $z + 1 = r(\cos t + i \sin t)$, unde $t = \arg(z + 1)$. Atunci avem că

$$z^2 - z + 1 = r^2(\cos 2t + i \sin 2t) - 3r(\cos t + i \sin t) + 3,$$

$$\begin{aligned} |z^2 - z + 1|^2 &= r^4 + 9r^2 + 9 - (6r^3 + 18r) \cos t + 6r^2(2 \cos^2 t - 1) = \\ &= \frac{1}{4}(r^2 - 3)^2 + 12 \left(r \cos t - \frac{r^2 + 3}{4} \right)^2 \geq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Deci $|z^2 - z + 1| \geq \frac{1}{2}$.

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică
 Clasa a X-a
 Craiova, 16 februarie 2014
 Barem de corectare

Problema 1.

Problema 1.

Oficiu	1p
Demonstrarea faptului că $A_0 \subseteq f^{-1}(f(A_0))$.	1.5p
Demonstrarea cazului de egalitate atunci când f este surjectivă	1.5p
Demonstrarea faptului că $f(f^{-1}(B_0)) \subseteq B_0$	1.5p
Demonstrarea cazului de egalitate atunci când g este surjectivă	1.5p
Total	7p

Problema 2.

Oficiu	1p
Rescrierea relațiilor sub forma $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = -1, \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1, \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = \frac{1}{a}$.	3p
Găsirea soluțiilor $\frac{1}{xy} = \frac{1+2a}{2a}, \frac{1}{yz} = \frac{1-2a}{2a}$ și $\frac{1}{zx} = -\frac{1}{2a}$	2p
Găsirea concluziei $xyz = \pm \sqrt{\frac{8a^3}{4a^2-1}}$	1p
Total	7p

Problema 3.

Oficiu	1p
Aducerea membrului stâng la forma $2^x \left \sin \frac{a-\pi/3}{2} \right ^x + 2^x \left \sin \frac{a+\pi/3}{2} \right ^x$	2p
Aducerea membrului drept la forma $2^{x+1} \left \sin \left(\frac{a-\pi/3}{2} \right) \right ^{\frac{x}{2}} \left \sin \left(\frac{a+\pi/3}{2} \right) \right ^{\frac{x}{2}}$	1.5p
Obținerea ecuației $\sin \frac{a-\pi/3}{2} = \pm \sin \frac{a+\pi/3}{2}$	1.5p
Obținerea soluțiilor	1p
Total	7p

Problema 4.

Oficiu	1p
Reducerea concluziei la a demonstra că $ z^2 - z + 1 \geq \frac{1}{2}$	1p
Obținerea faptului că $ z^2 - z + 1 ^2 = \frac{1}{4}(r^2 - 3)^2 + 12 \left(r \cos t - \frac{r^2+3}{4} \right)^2$	3p
Deducerea concluziei $ z^2 - z + 1 \geq \frac{1}{2}$	2p
Total	7p