



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE ASTRONOMIE ȘI ASTROFIZICĂ

IASI

EDIȚIA a XXI-a

24-29 MAI 2024

PROBA ANALIZA DATELOR

CATEGORIA SENIORI 2

SUBIECTUL I. Clasificarea taxonomică a asteroizilor (8p)

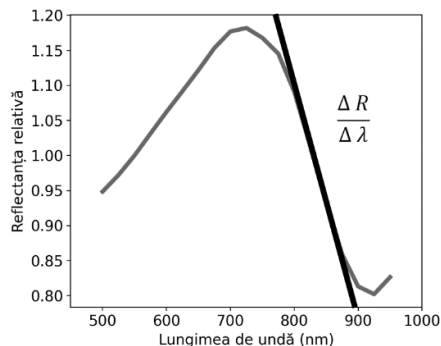
Spectrele asteroizilor oferă informații despre compoziția lor chimico – mineralogică, istoria acestora și implicit evoluția sistemului Solar. În acest sens, se analizează spectrul de reflectanță al asteroizilor, adică reflectanța spectrală în funcție de lungimea de undă. Pentru o anumită lungime, reflectanța se calculează ca raportul dintre densitatea spectrală a fluxului reflectat de asteroid și a fluxului solar incident pe suprafața asteroidului, $R(\lambda) = \frac{j_{refl}(\lambda)}{j_{inc}(\lambda)}$.

Pe baza acestor spectre, s-a definit o clasificare taxonomică a asteroizilor. S-a constatat că spectrul de reflectanță poate să aibă diferite forme în funcție de compoziția asteroidului, spectrele asemănătoare ale asteroizilor cu compoziție similară făcând parte din aceeași clasă spectrală. Trei dintre aceste clase spectrale sunt:

- Clasa spectrală **C** – Clasa din care fac parte cei mai mulți asteroizi (75%), sunt localizați în partea exterioară a centurii de asteroizi (după 3 UA) și dincolo de aceasta. Sunt asteroizi carbonici (cu conținut ridicat de carbon). Reflectanța prezintă variații relativ mici în funcție de lungimea de undă și nu se găsesc benzi de absorbție proeminente.
- Clasa spectrală **S** – Asteroizi care se găsesc de obicei în centura de asteroizi (2.2 – 3 UA), rar în alte părți ale sistemului Solar, fiind compuși din silicați (olivină, piroxen). Putem observa o bandă de absorbție în infraroșul apropiat (0.9 – 1.0 μm), nu foarte adâncă și de lățime moderată, dar și încă o bandă la 2 μm .
- Clasa spectrală **V** – Este alcătuită din asteroizi abundenți în piroxen. Din acest motiv, benzile de la 1 μm și 2 μm sunt mai adânci și mai înguste ca aspect în comparație cu spectrele de clasă **S**, care nu au un procent de piroxen la fel de ridicat.

În Anexa 1 sunt date opt spectre de reflectanță pentru asteroizi din sistemul Solar. Reflectanța a fost normalizată prin împărțirea la reflectanța măsurată la 550 nm, $R^*(\lambda) = \frac{R(\lambda)}{R(550\text{ nm})}$.

- a) Pe baza informațiilor de mai sus, completați Anexa 1 identificând clasa spectrală a asteroizilor. (2p)



Pentru a caracteriza banda de absorpție de la $1 \mu m$ se definesc două mărimi fizice: panta spectrală a benzii, $\frac{\Delta R}{\Delta \lambda}$, și coeficientul de adâncime al benzii, $\frac{R_{max}}{R_{min}}$, adică raportul dintre reflectanța maximă la capătul stâng al benzii între $0.7 - 0.8 \mu m$ și reflectanța minimă la adâncime maximă.

- b) Folosind spectrele din Anexa 1, estimați cele două mărimi fizice definite anterior pentru asteroizii de tip S și V. (2p)

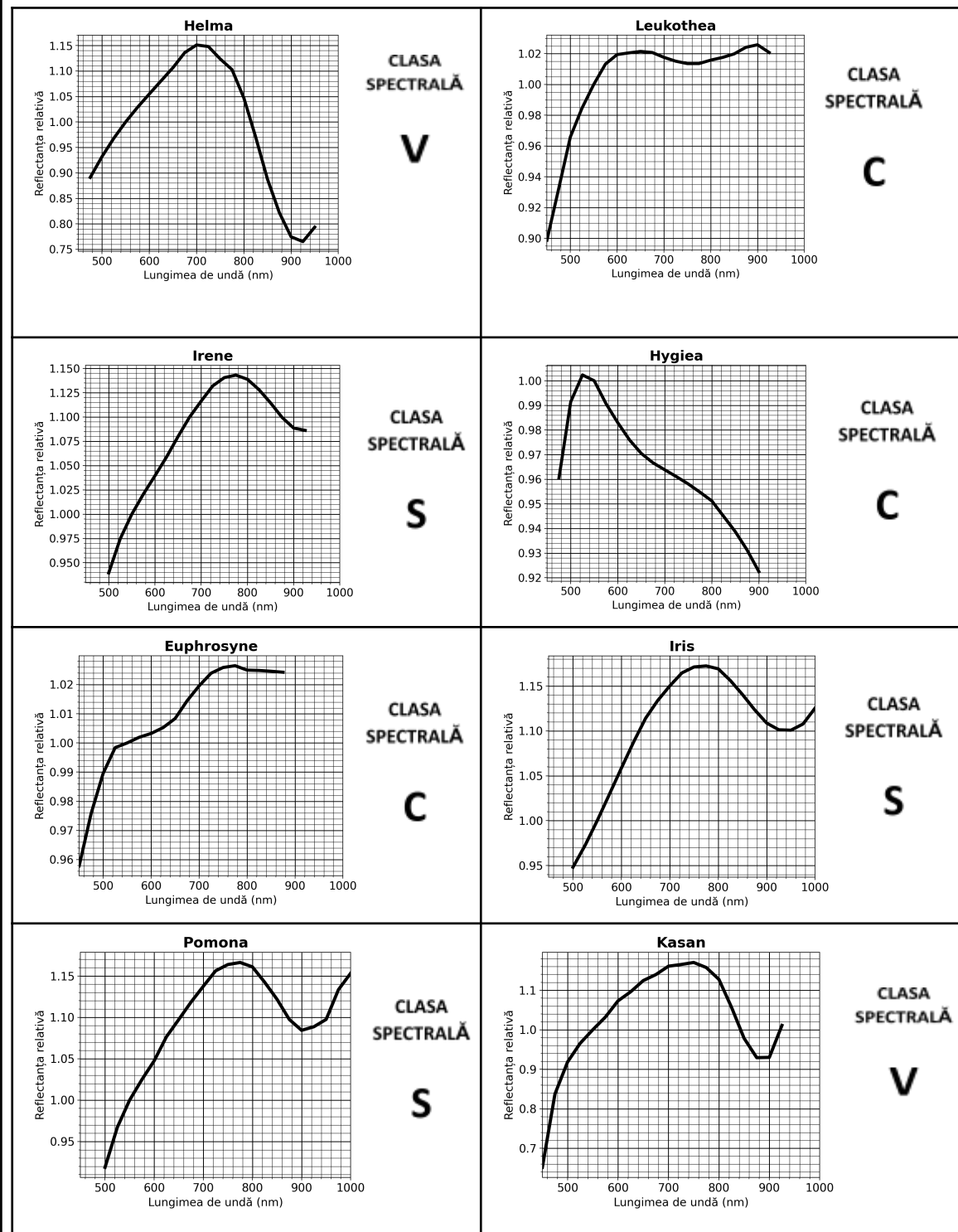
Din spectrul de reflectanță se pot determina și indicii de culoare. Să considerăm benzile spectrale V (500 – 600 nm) și R (600 – 700 nm). Se cunosc indicii de culoare ai Soarelui, $V_{\odot} = 4.81$ și $R_{\odot} = 4.99$.

- c) Estimați indicii de culoare V – R pentru cei opt asteroizi. Explicați modul de lucru – cum trecem de la spectrul de reflectanță la valori de magnitudine? (3.4p)
- d) Precizați:

- (1) asteroidul de clasă S cu cea mai ridicată concentrație de piroxen (0.3p)
- (2) asteroidul care înroșește cel mai mult spectrul solar reflectat (0.3p)

Rezolvare

Punctaj



0.25 x 8

a. 0.25p pentru fiecare clasificare corectă ... 0.25p x 8 = 2p

b. 2p (rezultate numerice)

Se acordă **0.20p / 0.10p** pentru fiecare valoare completată corect în limitele acceptate.

Rezultatele cu mai multe cifre semnificative **se penalizează** cu **0.05p**.

Panta spectrală $\frac{\Delta R}{\Delta \lambda}$ este **negativă**, indicând o descreștere în reflectanță. Dacă valoarea completată este pozitivă (luată în modul fără nici o explicație), atunci **se penalizează** cu **0.05p**.

Asteroid	Clasa spectrală	$\frac{\Delta R}{\Delta \lambda} (\mu m^{-1})$			$\frac{R_{max}}{R_{min}}$		
			0.20p	0.10p		0.20p	0.10p
Helma	V	-3.2	± 0.3	± 0.5	1.50	± 0.01	± 0.02
Irene	S	-0.5	± 0.05	± 0.10	1.04	± 0.01	± 0.02
Iris	S	-0.6	± 0.1	± 0.2	1.06	± 0.01	± 0.02
Pomona	S	-0.8	± 0.1	± 0.2	1.07	± 0.01	± 0.02
Kasan	V	-3.0	± 0.3	± 0.5	1.25	± 0.01	± 0.02

c. 3.4p (1p mod de lucru + 2.4p rezultate numerice)

Pentru a obține magnitudinile asteroizilor în benzile V și R , se calculează fluxul total reflectat de asteroid.

$$F = j_{refl-mediu} \Delta \lambda$$

$$j_{refl-mediu} \cong j_{inc-mediu} * R_{mediu}^*$$

Densitatea spectrală de flux incident este proporțională cu densitatea spectrală de radiație emisă de Soare la aceeași lungime de undă, deci

$$j_{inc-mediu} \propto L_{\odot-mediu}$$

Vom aproxima spectrul Soarelui ca fiind constant în benzile V și R , considerând densitatea spectrală de flux la lungimile efective 550 nm și 650 nm.

2

0.25

Observație: O metodă mai exactă ar fi să se calculeze densitatea spectrală a spectrului Solar folosind legea lui Planck a radiației, iar mai apoi să se integreze numeric integrala pentru a obține fluxul total. Pentru a simplifica semnificativ calculele ne vom baza pe aproximarea de tip spectru plat calculat la valoarea lungimii de undă efective pentru fiecare bandă.

Astfel, obținem

$$F_V \propto L_{\odot}(550 \text{ nm})R(550 \text{ nm})R_{\text{mediu-V}}^* (600 \text{ nm} - 500 \text{ nm})$$

$$F_R \propto L_{\odot}(650 \text{ nm})R(550 \text{ nm})R_{\text{mediu-R}}^* (700 \text{ nm} - 600 \text{ nm})$$

Următorul pas constă în a aplica legea lui Pogson, pentru a afla indicele de culoare

$$V - V_{\odot} = -2.5 \log \frac{F_V}{L_{\odot}(550 \text{ nm})\Delta\lambda}$$

$$R - R_{\odot} = -2.5 \log \frac{F_R}{L_{\odot}(650 \text{ nm})\Delta\lambda}$$

0.5

Din relațiile de mai sus, obținem

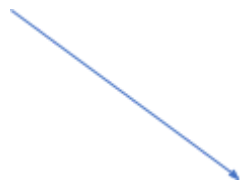
$$V - R = V_{\odot} - R_{\odot} - 2.5 \log \frac{F_V}{L_{\odot}(550 \text{ nm})\Delta\lambda} \frac{L_{\odot}(650 \text{ nm})\Delta\lambda}{F_R}$$

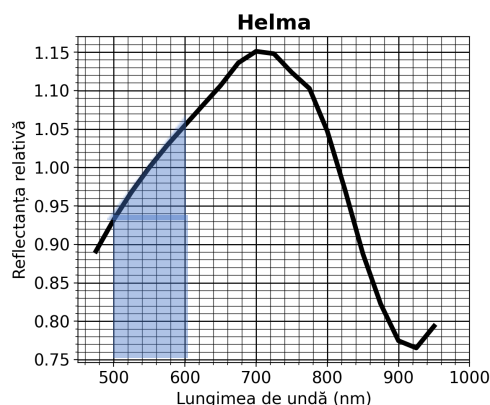
$$V - R = V_{\odot} - R_{\odot} - 2.5 \log \frac{R_{\text{mediu-V}}^* (600 \text{ nm} - 500 \text{ nm})}{R_{\text{mediu-R}}^* (700 \text{ nm} - 600 \text{ nm})}$$

0.25

Valorile $R_{\text{mediu-V}}^* (600 \text{ nm} - 500 \text{ nm})$ și $R_{\text{mediu-R}}^* (700 \text{ nm} - 600 \text{ nm})$ se pot estima din grafic estimând aria de sub graficul reflectanței spectrale. De exemplu, dacă folosim aria unui trapez cu vârfurile la $R(500 \text{ nm})$ și $R(600 \text{ nm})$, atunci

$$R_{\text{mediu-V}}^* (600 \text{ nm} - 500 \text{ nm}) \approx \frac{R^*(500 \text{ nm}) + R^*(600 \text{ nm})}{2} \times 100 \text{ nm}$$





Observație: aria de sub grafic nu este în totalitate vizibilă în graficele date, aceasta trebuie extinsă până la $R^* = 0$.

Se acordă **0.30p / 0.15p** pentru fiecare valoare completată corect în limitele acceptate.

Rezultatele cu mai multe cifre semnificative **se penalizează** cu **0.05p**.

*Dacă în formula de calcul pentru $V - R$ nu se iau în considerare culorile Soarelui, atunci va exista o diferență de 0.19 magnitudini. În acest caz punctajul acordat se reduce la **0.20p / 0.10p**, iar pentru modul de lucru se acordă doar 0.5p din totalul de 1p.*

0.3 x 8

Asteroid	Clasa spectrală	$V - R$		
			0.30p	0.15p
Helma	V	-0.07	± 0.01	± 0.02
Leukothea	C	-0.15	± 0.01	± 0.02
Irene	S	-0.09	± 0.01	± 0.02
Hygiea	C	-0.20	± 0.01	± 0.02
Euphrosyne	C	-0.16	± 0.01	± 0.02
Iris	S	-0.07	± 0.01	± 0.02
Pomona	S	-0.07	± 0.01	± 0.02
Kasan	V	-0.05	± 0.01	± 0.02

d. Se acordă 0.3p pentru fiecare asteroid specificat corect: • asteroidul de clasă S cu cea mai ridicată concentrație de piroxen este Pomona, deoarece prezintă cea mai abruptă pantă spectrală • asteroidul care înroșește cel mai mult spectrul solar reflectat este Kasan, având cel mai mare indice de culoare $V - R$	0.3 0.3
---	-----------------------

SUBIECTUL II. Curba de lumină. (8p)

Fluxul de lumină provenit de la diferiți aștri poate varia din numeroase motive. Atunci când observăm un astru pentru o perioadă suficientă de timp, putem identifica uneori un anumit trend

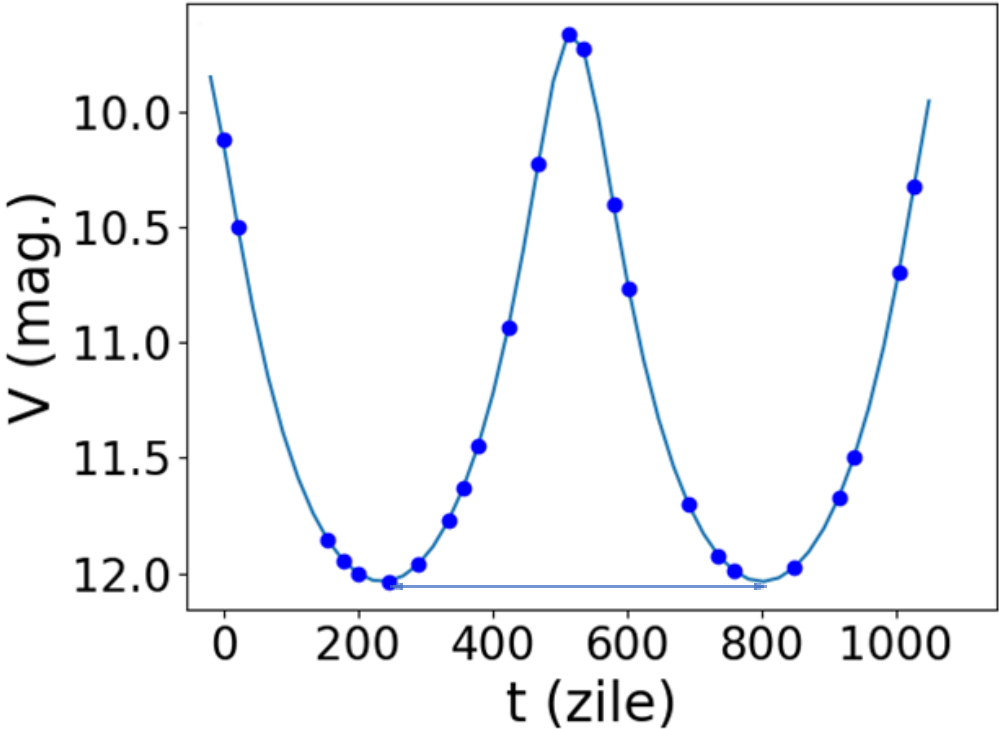
periodic al strălucirii, care reiese din curba de lumină (reprezentarea grafică a magnitudinii/strălucirii în funcție de timp).

Vom analiza în continuare curba de lumină a unui asteroid din sistemul Solar, urmărit o lungă perioadă de timp. Asteroidul din acest studiu are două proprietăți speciale: este aproape perfect sferic și prezintă o suprafață omogenă din punct de vedere compozițional. Se cunoaște diametrul asteroidului, $D = 200 \text{ km}$. În tabel sunt date momentul observării și magnitudinea în banda V. Asteroidul se mișcă pe o orbită circulară în jurul Soarelui.

- Trasați curba de lumină a asteroidului reprezentând grafic magnitudinea în funcție de timp. (3p)
- Determinați perioada de rotație a asteroidului în jurul Soarelui și raza orbitei circulare. (2p)
- Determinați albedoul asteroidului. (2p)
- Determinați unghiul de fază al asteroidului la momentul $t = 0$. (1p)

t (zile)	V (mag.)
0	10.12
22	10.5
157	11.86
179	11.94
201	12.0
246	12.03
291	11.96
335	11.77
358	11.63
380	11.45
425	10.94
470	10.22
514	9.66
537	9.73
581	10.4
604	10.76
693	11.7
738	11.92
760	11.99
850	11.98
917	11.67
939	11.5
1006	10.69
1029	10.33

Mag. aparentă în V	– 26.74
Distanța Pământ – Soare	$1.496 \times 10^{11} \text{ m}$
1 an sideral, $P_{\oplus}$	365.25 zile

Rezolvare	Punctaj
a) Punctele sunt corect ilustrate pe grafic 24 x 0,1p = 2.4p Mărimile fizice și unitățile de măsură sunt trecute pe axe 0.2p Valorile numerice pe cele două axe sunt uniform distribuite 0.2p Așezarea în pagină și spațierea sunt potrivite 0.2p  b) Din grafic obținem perioada sinodică $P_s = 565 \text{ zile } (\pm 5 \text{ zile})$ dar $\frac{1}{P_s} = \frac{1}{P_{\oplus}} - \frac{1}{P_{ast}}$ de unde $P_{ast} = 1030 \text{ zile } (\pm 5 \text{ zile})$ Aplicând Kepler III, $r = \sqrt[3]{\left(\frac{P_{ast}}{1 \text{ an}}\right)^2} = 2,0 \text{ UA}$	3 0,5 0.5 1

c) Fluxul reflectat de asteroid este

$$F_{refl} = A (albedo) \times \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \times \frac{\pi D^2}{4}$$

Fluxul reflectat de asteroid măsurat de pe Pământ va fi

$$F = \frac{F_{refl}}{4\pi\Delta^2} \times f(\phi)$$

unde $f(\phi) = \frac{1+\cos\phi}{2}$ este funcția de fază.

La conjuncție avem $f(\phi) = 1$,

$$F = \frac{AL_{\odot}D^2}{64\pi r^2\Delta^2}$$

Constanta solară corespunzătoare magnitudinii în banda V este

$$F_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r_{PS}^2}$$

Din legea lui Pogson obținem

$$\frac{F}{F_{\odot}} = 10^{-0.4(V-V_{\odot})}$$

$$\frac{AD^2r_{PS}^2}{16r^2\Delta^2} = 10^{-0.4(V-V_{\odot})}$$

$$A = \frac{16r^2\Delta^2}{D^2r_{PS}^2} \times 10^{-0.4(V-V_{\odot})}$$

$$A = 0.10 (\pm 0.01)$$

Notății:

r_{PS} – distanța Pământ – Soare

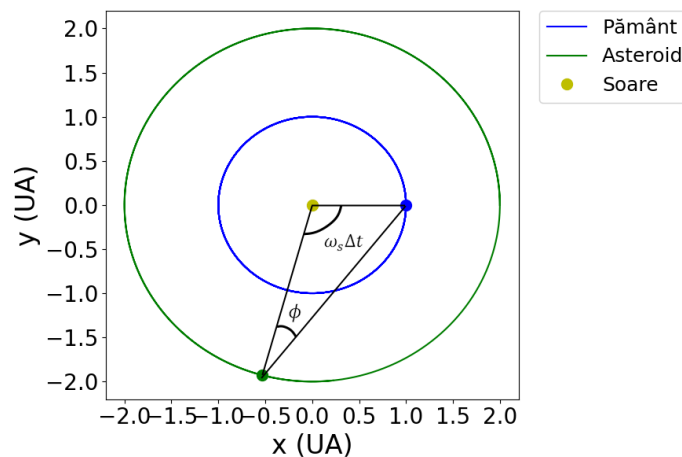
r – distanța asteroid – Soare

Δ – distanța asteroid – Pământ

ϕ – unghiul de fază

P_S – perioadă sinodică asteroid

$$P_S = \frac{2\pi}{\omega_s}$$



0.5

1.5

d) $\frac{\sin \phi}{r_{PS}} = \frac{\sin (\pi - \phi - \omega_s (t - t_0))}{r}$ $\frac{\sin \phi}{r_{PS}} = \frac{\sin (\phi + \omega_s \Delta t)}{r} = \frac{\sin \phi \cos \omega_s \Delta t + \cos \phi \sin \omega_s \Delta t}{r}$ $\operatorname{tg} \phi = \frac{\sin \omega_s \Delta t}{\frac{r}{r_{PS}} - \cos \omega_s \Delta t}$ Din grafic, la momentul de intensitate maximă avem $t = 515 \text{ zile}$ De unde obținem momentul la care a avut loc conjuncția înainte de $t = 0$, $t_0 = t - P_s = -50 \text{ zile } (\pm 5 \text{ zile})$ Luând $t = 0$ și înlocuind $\Delta t = 0 - (-50) = 50 \text{ zile}$, se obține în relația unghiului de fază $\operatorname{tg} \phi = \frac{\sin 2\pi \frac{50 \text{ zile}}{565 \text{ zile}}}{\frac{2 \text{ UA}}{1 \text{ UA}} - \cos 2\pi \frac{50 \text{ zile}}{565 \text{ zile}}}$ de unde $\operatorname{tg} \phi = 0.46$ $\phi = 25^\circ (\pm 1^\circ)$	0.25 0.25 0.5
--	------------------------------------

SUBIECTUL III. Relația masă-luminozitate (9p)

În astronomie există o relație care leagă masa și luminozitatea unei stele. În forma ei generală, se poate scrie ca:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \alpha \times \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\beta}$$

unde L este luminozitatea stelei, M este masa stelei, $L_{\odot}$ este luminozitatea Soarelui, $M_{\odot}$ este masa Soarelui, iar α și β sunt coeficienți care variază în funcție de masa stelei pentru care este aplicată relația. Într-o primă aproximație se poate presupune că acești coeficienți sunt constanți în cadrul unuia dintre cele trei intervale de masă: mase mici, mase intermediare, mase mari.

- a) Care este valoarea masei minime posibile pentru o stea? De ce există o astfel de valoare minimă? **(0.5p)**

În tabelul 1 de mai jos sunt date masele și luminozitățile a 22 de stele cu mase mici sau intermediare.

- b) Pe foaia cu scară logaritmică primită împreună cu subiectele, marcați punctele corespunzătoare. Această foaie va fi predată la final împreună cu rezolvările. **(3p)**

Tabel 1 Masă și luminozități pentru stele mici și intermediare

Steaua	Masa ($M_{\odot}$)	Luminozitatea ($L_{\odot}$)
S1	0,88	61×10^{-2}
S2	3,61	148,55
S3	27,95	$61,05 \times 10^4$
S4	0,22	72×10^{-4}
S5	0,41	28×10^{-3}
S6	0,17	44×10^{-4}
S7	0,29	$13,74 \times 10^{-3}$
S8	14,66	$45,5 \times 10^3$
S9	32,57	$11,3 \times 10^5$
S10	7,69	$3,49 \times 10^3$
S11	21,21	$20,25 \times 10^4$
S12	0,10	$13,10 \times 10^{-4}$
S13	0,25	$93,9 \times 10^{-4}$
S14	0,32	$16,40 \times 10^{-3}$
S15	0,14	$22,23 \times 10^{-4}$
S16	0,55	$54,15 \times 10^{-3}$
S17	0,62	$70,12 \times 10^{-3}$
S18	42,37	$32,5 \times 10^5$
S19	1,25	2,40
S20	2,74	56,40
S21	1,89	12,76
S22	1	$99,9 \times 10^{-2}$

- c) Care sunt stelele de masă mică și care sunt stelele de masă intermediară? Dați răspunsul în funcție de numele lor: litera S urmată de un număr. Justificați răspunsul. **(0.5p)**
- d) Determinați valorile coeficienților α și β pentru mase mici, respectiv pentru mase intermediare. **(2p)**
- e) Descrieți cum ați fi rezolvat problema dacă în loc de foaia cu scară logaritmică vi s-ar fi dat o simplă hârtie milimetrică. **(0.5p)**

Pentru stelele de mase mari, exponentul β are valoarea 1. În acest caz nu este nevoie de scară logaritmică pentru a determina coeficientul rămas.

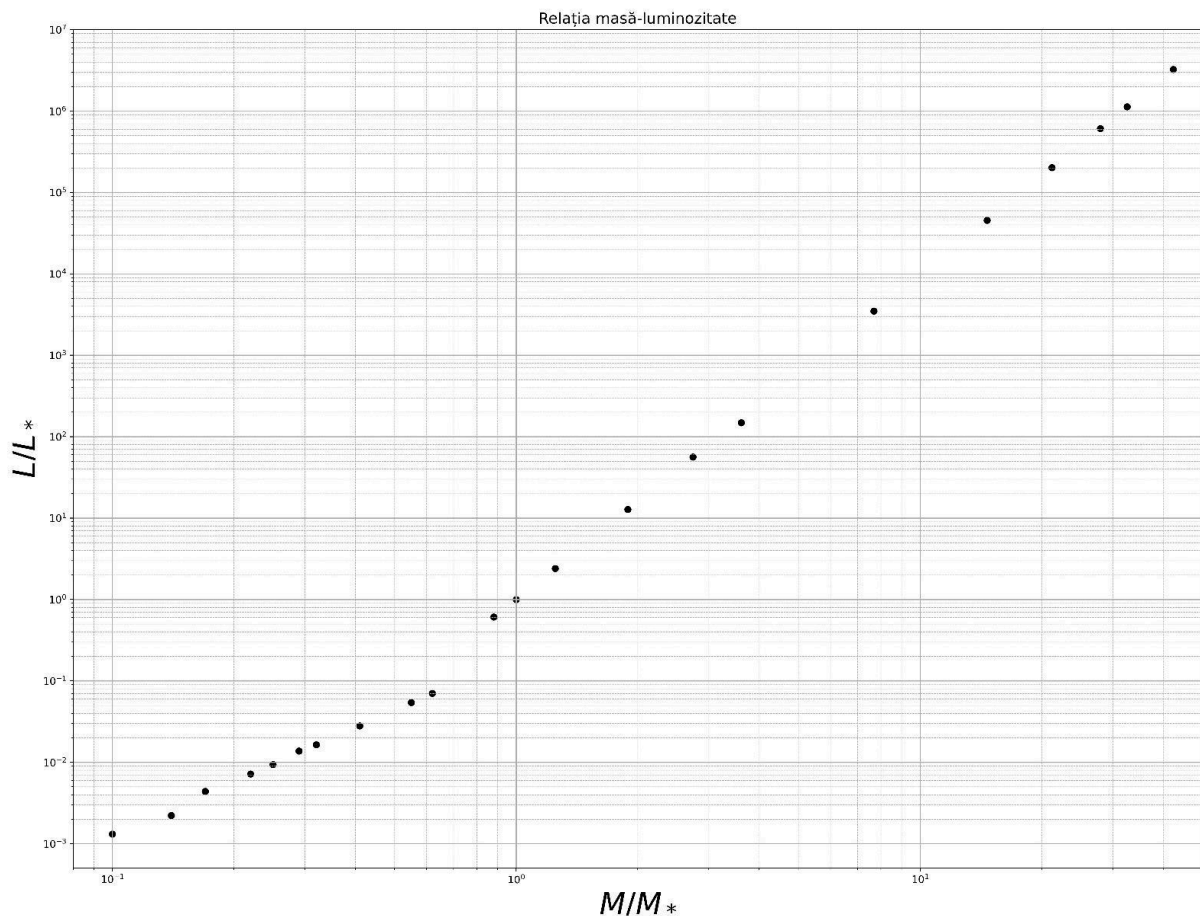
- f) Folosind datele din Tabelul 2 pentru stele masive, marcați punctele pe hârtia milimetrică primită și determinați valoarea lui α . Hârtia milimetrică va fi predată la final împreună cu rezolvările. **(2.5p)**

Tabel 2. Mase și luminozități pentru stele mari.

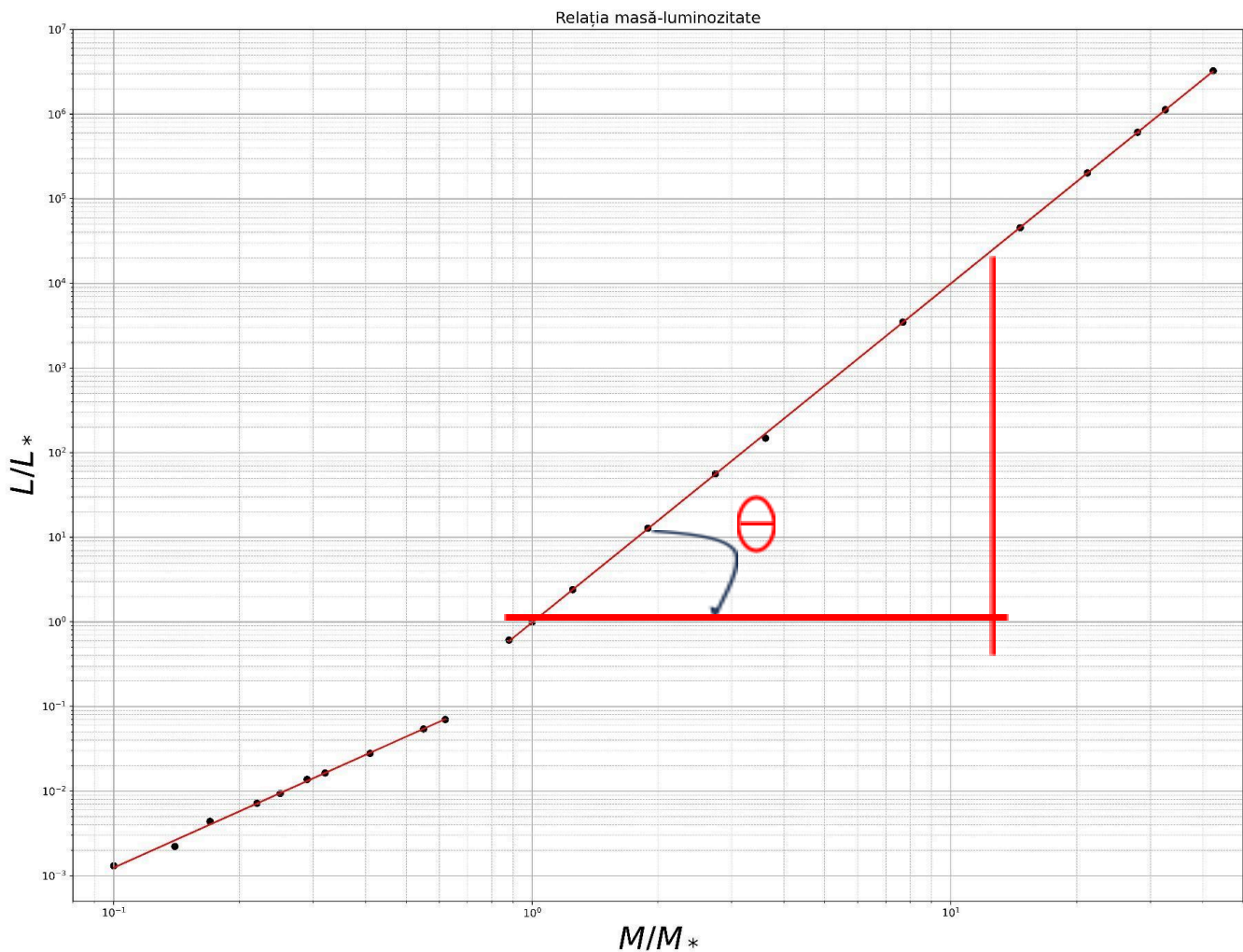
Stea	Masa ($M_{\odot}$)	Luminozitatea ($L_{\odot} \times 10^6$)
S23	65.23	2.21
S24	74.89	2.63
S25	98.21	3.40
S26	124.58	4.45
S27	109.51	3.95
S28	89.12	3.22
S29	81.81	2.95
S30	116.11	4.16
S31	132.76	4.57
S32	70.12	2.51

BAREM

- a) Masa minimă posibilă pentru o stea este de $0,08M_{\odot}$. Aceasta este masa minimă necesară pentru ca o stea să susțină fuziunea hidrogenului în miezul său, procesul care definește o stea. (0.5p)
- b) Punctele sunt corect ilustrate pe grafic $20 \times 0,15p = 3p$



- c) Masă mică: S4, S5, S6, S7, S12, S13, S14, S15, S16, S17
 Masă intermediară: S1, S2, S3, S8, S9, S10, S11, S18, S19, S20, S21, S22 (0.25p)
 Trecerea de la masa mică la masă intermediară se poate observa în grafic prin discontinuitatea ce are loc în apropierea stelelor cu masa egală cu masa soarelui. (0.25p)
- d)



Analizând relația din problemă prin aplicarea logaritmului și în stânga și în dreapta vom obține:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \alpha \times \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\beta}$$

$$\log \frac{L}{L_{\odot}} = \log \left(\alpha \times \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\beta} \right) = \log a + \beta \log \frac{M}{M_{\odot}}$$

Calculăm acum panta celor două dependențe liniare, întâi pentru **mase mici** utilizând stelele S5 și S12:

$$\tan \theta = \frac{\log \frac{L_{S5}}{L_{\odot}} - \log \frac{L_{S12}}{L_{\odot}}}{\log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}} - \log \frac{M_{S12}}{M_{\odot}}} = \frac{\log a + \beta \log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}} - \log a - \beta \log \frac{M_{S12}}{M_{\odot}}}{\log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}} - \log \frac{M_{S12}}{M_{\odot}}}$$

$$\tan \theta = \frac{\log a + \beta \log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}} - \log a - \beta \log \frac{M_{S12}}{M_{\odot}}}{\log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}} - \log \frac{M_{S12}}{M_{\odot}}} = \beta$$

Deci coeficientul β se poate calcula ca:

$$\beta = \frac{\log \frac{L_{S5}}{L_{\odot}} - \log \frac{L_{S12}}{L_{\odot}}}{\log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}} - \log \frac{M_{S12}}{M_{\odot}}} = \frac{\log 0,028 - \log 0,00131}{\log 0,41 - \log 0,1} = 2,17 \pm 0.02 \text{ (0.5p)}$$

Orice valoare apropiată răspunsului se punctează maxim, dacă procedura din barem a fost urmată și calculele sunt corecte.

Coeficientul α se calculează din relația masa-luminozitate pentru oricare dintre punctele date, care se află pe linie:

$$\log \frac{L_{S5}}{L_{\odot}} = \log a + \beta \log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}}$$

$$\log a = \log \frac{L_{S5}}{L_{\odot}} - \beta \log \frac{M_{S5}}{M_{\odot}}$$

$$\log a = \log 0,028 - 2,17 \times \log 0,41$$

$$\log a = -0,713 \Rightarrow \alpha = 0,19 \pm 0.01 \text{ (0.5p)}$$

Orice valoare apropiată răspunsului se punctează maxim, dacă procedura din barem a fost urmată și calculele sunt corecte.

Relația pentru stele de mase mici este:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 0,19 \times \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2,17}$$

Pentru **mase intermediare**, repetăm procesul de mai sus, considerând stelele S22 și S10:

$$\beta = \frac{\log \frac{L_{S10}}{L_{\odot}} - \log \frac{L_{S22}}{L_{\odot}}}{\log \frac{M_{S10}}{M_{\odot}} - \log \frac{M_{S22}}{M_{\odot}}} = \frac{\log 3490 - \log 1}{\log 7,69 - \log 1} = 3,999 \approx 4 \pm 0.02 \text{ (0.5p)}$$

Orice valoare apropiată răspunsului se punctează maxim, dacă procedura din barem a fost urmată și calculele sunt corecte.

$$\log a = \log \frac{L_{S22}}{L_{\odot}} - \beta \log \frac{M_{S22}}{M_{\odot}}$$

$$\log a = \log 1 - 4 \times \log 1 = 0 \Rightarrow$$

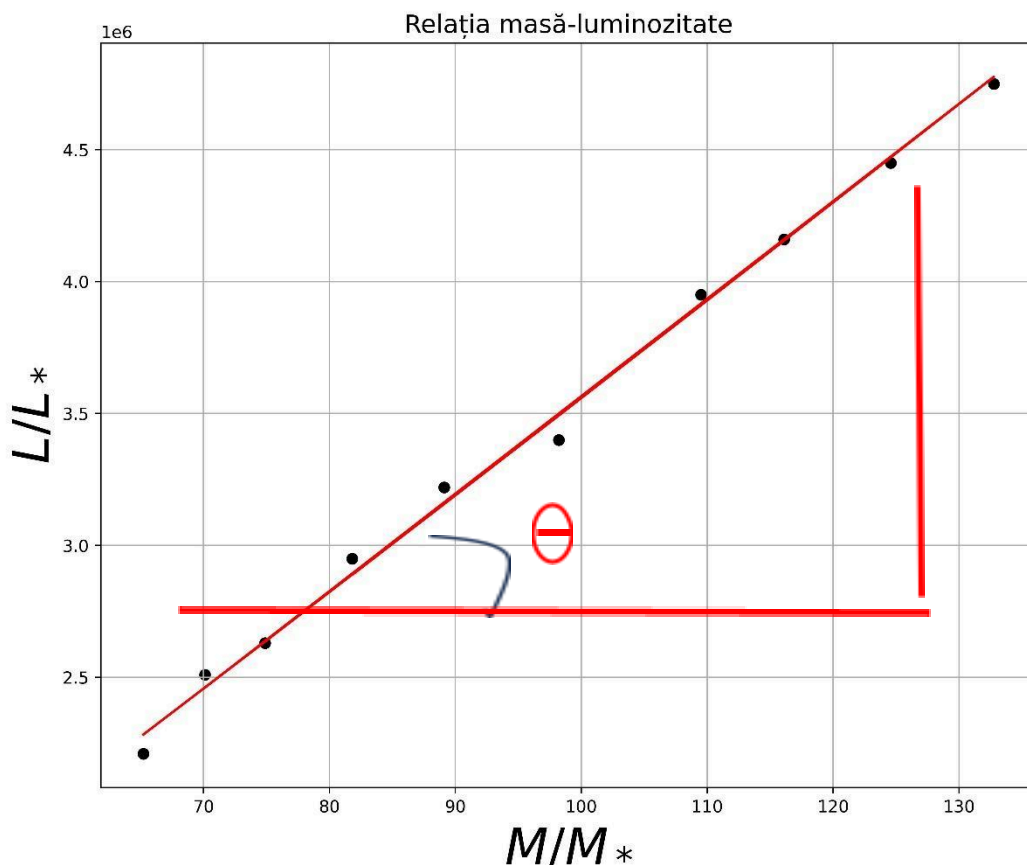
$$\Rightarrow \alpha = 10^0 = 1 \pm 0.01 \text{ (0.5p)}$$

Relația pentru stele cu mase intermediare este:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^4$$

- e) Dacă în loc de foaia cu scară logaritmică am fi folosit hârtie milimetrică, pentru fiecare stea ar fi trebuit să calculăm $\log \frac{L}{L_{\odot}}$ și $\log \frac{M}{M_{\odot}}$. Realizând apoi graficul $\log \frac{L}{L_{\odot}}$ pe axa OY și $\log \frac{M}{M_{\odot}}$ pe axa OX am fi obținut aceleași puncte și aceleași drepte printre puncte ca în cazul foii logaritmice, de unde am fi determinat în același mod α și β . (0.5p)
- f) Pentru stele cu mase mari, relația masă-luminozitate este:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \alpha \times \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^1$$



- Punctele sunt corect ilustrate pe grafic 10 x 0,15p = **1.5p**
- Valorile numerice pe cele două axe sunt uniform distribuite **0.2p**
- Așezarea în pagină și spațierea sunt potrivite **0.1p**

Aplicând relația pentru stelele S24 și S30 obținem:

$$\tan \theta = \frac{\frac{L_{S30}}{L_{\odot}} - \frac{L_{S24}}{L_{\odot}}}{\frac{M_{S30}}{M_{\odot}} - \frac{M_{S24}}{M_{\odot}}} = \alpha$$

$$\alpha = \frac{4,16 \times 10^6 - 2,63 \times 10^6}{116,11 - 74,89} = (3,71 \pm 0,02) \times 10^4 \text{ (0.7p)}$$

Relația pentru stele cu mase mari este:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 3,71 \times 10^4 \times \frac{M}{M_{\odot}}$$

Pentru rezultate obținute cu metoda celor mai mici pătrate care sunt în concordanță cu rezultatele din barem se acordă punctaj maxim.