

Barem de notare – clasa a XI-a

Problema	Soluție	Punctaj
1	a) Relația din ipoteză se mai scrie: $A^2(B - I_n) + B - I_n = -I_n \Leftrightarrow (A^2 + I_n)(I_n - B) = I_n \Rightarrow$ $\Rightarrow \det(I_n - B) \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow I_n - B \text{ este inversabilă .}$	1p 1p 1p
	b) Din a) $\Rightarrow (A^2 + I_n)(I_n - B) = I_n \Rightarrow (A + iI_n)(A - iI_n)(I_n - B) = I_n \Rightarrow$ (1p) $\Rightarrow (A - iI_n)(I_n - B)$ inversabilă, având inversa $(A + iI_n) \Rightarrow$ (1p) $\Rightarrow (A - iI_n)(I_n - B)(A + iI_n) = I_n \Rightarrow$ (1p) $\Rightarrow -IAB + IBA = 0_n \Rightarrow AB = BA$ (1p)	
2	a) Se punctează orice exemplu care îndeplinește condiția din enunț. Ex $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	4p
	b) Prin reducere la absurd se presupune că există $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, astfel încât $AB=BA$ și $A^2+B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. $\det(A^2+B^2) = \det((A+iB)(A-iB)) = \det(A+iB)\det(A-iB) =$ $\det(A+iB)\det(\overline{A+iB}) = \det(A+iB)\det(A-iB) = \det(A+iB) ^2 \geq 0$ $\det(A^2+B^2) = -5$ Concluzia	0.5p 2p 0.5p
3	a) $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e+x)-1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}{\frac{x}{e}} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$ (1p) $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e+x) \cdot \ln(e+2x) - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e+x) \cdot \ln(e+2x) - \ln(e+2x) + \ln(e+2x) - 1}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(e+2x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e+x)-1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1+\frac{2x}{e}\right)}{\frac{2x}{e}} \cdot \frac{2}{e} = \frac{1}{e} + \frac{2}{e} = \frac{3}{e}$ (2p) b) Se poate utiliza metoda inducției matematice Pentru $n = 1$ afirmația este adevărată (conform a)) (1p)	1p 2p 1p

	Presupunem că $L_k = \frac{k(k+1)}{2e}, k \geq 1$ și demonstrăm că $L_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2e}$ 1p $L_{k+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e+x) \cdot \dots \cdot \ln(e+kx) \cdot \ln(e+(k+1)x) - 1}{x} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e+x) \cdot \dots \cdot \ln(e+kx) \cdot \ln(e+(k+1)x) - \ln(e+(k+1)x) + \ln(e+(k+1)x) - 1}{x}$ $= L_k + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{(k+1)x}{e}\right)}{\frac{(k+1)x}{e}} \cdot \frac{k+1}{e} = \frac{k(k+1)}{2e} + \frac{k+1}{e} = \frac{(k+1)(k+2)}{2e}$ 2p	
4	Fie $y=ax+b \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}$. Atunci $f(y) = f\left(\frac{y-b}{a}\right), (\forall)y \in \mathbf{R}$ 1p $f(y) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = f\left(\frac{\frac{y-b(a+1)}{a^2}-b}{a}\right) = f\left(\frac{y-b(a^2+a+1)}{a^3}\right).$ 1p Prin inducție matematică se obține $f(y) = f\left(\frac{y-b \sum_{i=0}^{n-1} a^i}{a^n}\right) = f\left(\frac{y}{a^n} - \frac{b}{a-1} \left(1 - \frac{1}{a^n}\right)\right), (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$ 2p Cum f este continuă pe $\mathbf{R}$ se obține că 1p $f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{y}{a^n} - \frac{b}{a-1} \left(1 - \frac{1}{a^n}\right)\right) = f\left(\frac{b}{1-a}\right) = 2014$ 1p Prin urmare funcția căutată este $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} f(x) = 2014, (\forall)x \in \mathbf{R}$ 1p	