

Olimpiada de matematică
Etapa locală, 21.02.2016
Clasa a XI- a

Subiecte :

1. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + d = 3$, $ad - bc = 2$.

- a) Arătați că $A^3 = 7A - 6I_2$.
- b) Să se arate că $\det(A^2 + 2I_2) = 18$.
- c) Să se arate că $\det(A^2 + 5I_2) = 54$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) Arătați că $A^{2016} = x^{672}I_3$.
- b) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $B = A^4 + A^5 + A^6$ este inversabilă.

3. Fie $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $\frac{1}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$,
pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că $0 < S_n < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} + 6S_n \right)^{n^3}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Prof. Mihai Bodan, Ciuperceni

4. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^4}{x^2+1}} + ax + b \right) = 1.$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru : 3 ore. La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.