

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 1.02.2020
Clasa a X-a

1. (7p) Arătați că numărul $\frac{5}{1 - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}} - \frac{17}{1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}} - 2\sqrt[3]{2}$ este natural.
2. (7p) Știind că $a, b, c \in (1, +\infty)$, demonstrați că
- $$\log_a \frac{a+b+c}{3} + \log_b \frac{a+b+c}{3} + \log_c \frac{a+b+c}{3} \geq 3.$$
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $(f \circ f)(x) = x^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- a) (4p) Poate fi funcția f injectivă? Dar surjectivă?
- b) (3p) Dați un exemplu de funcție cu proprietatea dată.
4. Numerele complexe z_1, z_2 îndeplinesc condițiile $|z_1| = |z_2|$, $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ și $|z_1 - z_2| = 1$.
- a) (3p) Arătați că $|z_1| = 1$.
- b) (4p) Calculați $\operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 - \operatorname{Re} z_2 \cdot \operatorname{Im} z_1$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.