

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică
Clasa a XII-a
Craiova, 9 februarie 2013

Problema 1. Pe Z considerăm legea de compoziție internă „ $\circ$ ” definită pentru $x, y \in Z$ prin

$$x \circ y = axy + b(x + y) + c,$$

unde $a, b, c \in Z$.

Să se arate că:

(i) Legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă dacă și numai dacă

$$b^2 - b - ac = 0.$$

(ii) Dacă $b^2 - b - ac = 0$, atunci legea de compoziție „ $\circ$ ” admite element neutru dacă și numai dacă b divide c .

Problema 2. Să se arate că grupurile $(R, +)$ și $(R^*, \cdot)$ nu sunt izomorfe.

Problema 3. Să se calculeze $\int \sin x \cos x \cos(2x) \dots \cos(2^{2013}x) dx$.

Problema 4. Să se determine numerele reale a și b astfel încât $f : [-1, 1] \rightarrow R$,

$$f(x) = \begin{cases} a + \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ b + \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

să admită primitive pe $[-1, 1]$.

(Gazeta Matematică)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10;

Timp de lucru: 3 ore.

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică
 Clasa a XII-a
 Craiova, 9 februarie 2013
 Barem de corectare

Problema 1.

Oficiu	1p
(i)	4p
(ii), , $\Rightarrow$ "	2p
, , $\Leftarrow$ "	3p
Total	10p

Problema 2.

Oficiu	1p
Presupunere prin absurd	3p
Există $a \in R$ astfel ca $f(a) = -1$	2p
$a = 0$	2p
$1 = -1$, absurd	2p
Total	10p

Problema 3.

Oficiu	1p
Identitatea $\sin x \cos x \cos(2x) \dots \cos(2^{2013}x) = \frac{\sin(2^{2014}x)}{2^{2014}}$	5p
Finalizare	4p
Total	10p

Problema 4.

Oficiu	1p
--------	----

$$g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

admite primitive _____ 3p

$f = g + h$ cu

$$h(x) = \begin{cases} a, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ b, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

_____ 2p

f admite primitive dacă și numai dacă h admite primitive _____ 3p

f admite primitive dacă și numai dacă $a = b = 0$ _____ 1p

Total _____ 10p