Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, 16 februarie 2024

Clasa a VII-a

BAREM

1. Soluție:

$\sqrt{\overline{0,a(bc)}+\overline{0,c(ab)}+\overline{0,b(ca)}}\ \epsilon\ N \Rightarrow \overline{0,a(bc)}+\overline{0,c(ab)}+\overline{0,b(ca)} = k^2$, k $\epsilon\ N$...........2p

$\Rightarrow \frac{\overline{abc}+\overline{cab}+\overline{bca}}{990} = k^2 \Rightarrow$ x+y+z= k^2 $\Rightarrow$ x+y+z= k. 3p

Cum $\overline{abc}$ este pătrat perfect $\Rightarrow$ $\overline{abc}$=$\{144, 225, 324, 441\}$..2p

2. Soluție:

$x, y\ \neq 0$

$\frac{y)1}{x}+\frac{x)2}{y}+\frac{3}{xy} = xy)4$..1 punct

$y + 2x + 3 = 4xy$

$y + 3 = 4xy - 2x$

$y + 3 = x(4y - 2)$...1 punct

$x = \frac{y+3}{4y-2}$ ....1 punct

$4y - 2 \neq 0, y \neq 2$

$4y - 2 \vdots 4y - 2$ și $y + 3\ \vdots 4y - 2$ => $4(y + 3) - (4y - 2) \vdots 4y - 2$

$4\,y + 12 - 4y + 2\ \vdots\ 4y - 2$ .....1 punct

$4y - 2$ $\in$ *D 14 = {± 1; ± 2 ; ± 7; ± 14}* ....*1 punct*

- Timp de lucru 3 ore.
- Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.
- Nu se acordă puncte din oficiu.

$4y-2=+1 => y=\frac{3}{4} \notin Z;$ ....2 puncte

$4y-2=-1 => y=\frac{1}{4} \notin Z;$

$4y-2=\ +2 => y=\ 1;\ x\ =\ \frac{1+3}{2}=\ 2$ x;y ∈ Z;

$4y-2=\ -2 => y=\ 0;dar\ y\ \neq 0;$

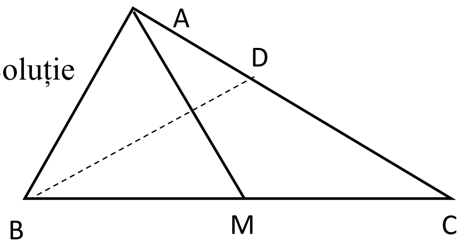
$4y-2=+7 => y=\frac{9}{4} \notin Z;$

$4y-2=-7 => y=\frac{-5}{4} \notin Z;$

$4y-2=+14 => y=4, dar\ x=\frac{4+3}{14}=\frac{7(7}{14}=\frac{1}{2} \notin Z;$

$4y-2=-14 => y=\frac{-12}{4}=-3, dar\ x=\frac{-3+3}{-14}=\frac{0}{-14}=0\ și\ x\neq 0$.

3. Soluție



a) Daca m(<B) = 2·m(<C) atunci m(<B)=60˚ și m(<C) = 30˚...............................1p
[BD este bisectoarea <B ⇒ m(<DBC) =30˚, <DBC ≡ <DCB ⇒ Δ DBC isoscel...1p
[DM] mediană în Δ DBC isoscel de vârf D ⇒[DM] este și înălțime atunci DM⊥ BC,
D € [BD- bisectoarea <B →d(D, AB)= d(D, BC) atunci DA=DM → Δ DAM isoscel...2p

b) [AM] mediana în Δ ABC dreptunghic în A atunci AM = BC/2, → AM = MB ⇒
ΔABM isoscel are și m(<B)=60˚ atunci ΔABM echilateral în care [BD este bisectoare ⇒
BD⊥AM..3p

4.

a) În triunghiul *AEG, HF* este linie mijlocie⇒ *HF// AGsi AG* =2 *HF* (1) 1p
Din G centrul de greutate triunghi ABC ⇒ *AG* = 2 G*D*(2). 1p
Din (1) și (2), obținem că *HF =GD si cumHF//GD* ⇒ *GDHF* este paralelogram 1p
b) Avem $A_{HGF}=A_{HFE}=A_{HGD}=A_{HED}$ cu justificare! 1p
Obținem că $A_{GDHF}=A_{GFE}=A_{GAE}/2 \Rightarrow A_{GAE}=2A_{GDHF}$ și $A_{GDHF}=A_{GDE}$ 1p
Atunci $3A_{GDHF}=A_{GAE}+A_{GDE}=A_{AED}$ 1p
GDHF paralelogram și O centrul său, obținem că 1p
$A_{GDHF}=4A_{FOG} \Rightarrow 12A_{FOG}=A_{AED}$.

- Timp de lucru 3 ore.
- Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.
- Nu se acordă puncte din oficiu.