OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 9 FEBRUARIE 2013

Clasa a VI-a

Problema 1. Se consideră mulțimea $A=\{1,\ 3,\ 5,\ \dots\ ,\ 2013\}$.

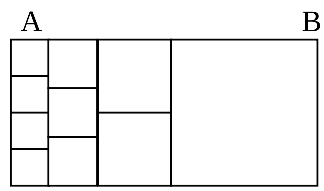
a) Calculați suma câturilor obținute prin împărțirea, cu rest, a fiecărui număr din mulțimea A la 513.

b) Arătați că oricum am alege două elemente ale mulțimii A suma sau diferența acestora este un număr divizibil cu 4.

Aurelia Cațaros, Călărași

Problema 2. a) La un spectacol sunt în sală 320 elevi și 80 de profesori. Vârsta medie a spectatorilor este de 18 ani. Aflați vârsta medie a elevilor care participă la spectacol dacă se cunoaște că vârsta medie a profesorilor este de 42 ani.

b) În figura alăturată este desenat un dreptunghi care este împărțit în 10 pătrate. Determinați lungimea laturii AB dacă lungimile laturilor pătratelor sunt numere naturale și au cele mai mici valori posibile.



Viorica Stoianovici, Călărași

Problema 3. După ce a construit n unghiuri congruente în jurul punctului O, $m\left(AOA_1\right)=m\left(A_1OA_2\right)=....=m\left(A_{n-1}OA_n\right)=x^0$, un elev observă că $m\left(A_nOA\right)=y^0<x^0;\ x,\ y\in\mathbb{N}^*$. Dacă n este numărul maxim al unghiurilor congruente care se pot construi în condițiile problemei, care este $m\left(A_nOA\right)$?

Sorin Furtună, Călărași

Problema 4. Câte perechi de numere naturale $(n,\ m)$, $n\le 25$, pentru care d este cel mai mare divizor comun, au proprietatea $n+m+d=2013$.

Adriana Constantin, Călărași

SUCCES!

Baremul de notare este: Problema 1. a) 4 puncte; b) 3 puncte; **Problema 2.** a) 4 puncte; b) 3 puncte; **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4. 7** puncte.

Str. Sloboziei, nr. 28, 910001
Mun. Călărași, Jud. Călărași
Tel: +40 0242 315 949
Fax: +40 0242 312 810
www.isj.cl.edu.ro

Clasa a VI-a

Problema1.

$A=\{1,3,5,......,2013\}$

a) $c=0:n\in\{1,3,...,511\}\rightarrow 256$ numere...........1p

$c=1:n\in\{513,515,.....,1025\}\rightarrow 257$ numere...........1p

$c=2:n\in\{1027,1029,...,1537\}\rightarrow 256$ numere...........1p

$c=3:n\in\{1539,......,2013\}\rightarrow 238$ numere

$S=0+1\cdot 257+2\cdot 256+3\cdot 238=1483$.................1$p$

b) Elementele multimii A sunt de forma:4k+1 si 4k+3

Cazul1: $x_1=4k_1+1$ si $x_2=4k_2+1\Rightarrow x_1-x_2=4(k_1-k_2)\vdots 4$

$x_1=4k_1+3$ si $x_2=4k_2+3\Rightarrow x_1-x_2=4(k_1-k_2)\vdots 4$...........1$p$

Cazul2: $x_1=4k_1+1$ si $x_2=4k_2+3\Rightarrow x_1+x_2=4(k_1+k_2+1)\vdots 4$...........1$p$

Deci, oricum se aleg doua elemente din A ,rezulta suma sau diferenta este divizibila cu 4……………………………………1p

Problema 2.

a)

$\dfrac{320\cdot v+80\cdot 42}{400}=18$..........................2p

$\Rightarrow 320v=7200-3360\Rightarrow v=\dfrac{3840}{320}=12$..............2$p$

b)Observam ca latimea dreptunghiului este c.m.m.m.c al numerelor 3 si 4……….2p

$[3;4]=12$

$AB=3+4+6+12=25$......................1p

Problema 3

$360^\circ = n \cdot x^\circ + y^\circ$ 1p

n este maxim cand x este minim ………………1p

$y^\circ = 1^\circ \Rightarrow 359^\circ = n \cdot x^\circ$

359 este prim ,deci x=1-imposibil sau x=359-imposibil………………..1p

$y^\circ = 2^\circ \Rightarrow 358^\circ = n \cdot x^\circ$

358=2$\cdot$179,deci x=2-imposibil sau pentru x=179 rezulta n=2.................1p

$y^\circ = 3^\circ \Rightarrow 357^\circ = n \cdot x^\circ$

357=3$\cdot$7$\cdot$17,deci x=3 – imposibil sau pentru x=7 rezulta n=51.................1p

Deci sunt 51 de unghiuri de cate 7° si $m\left(\measuredangle A_{51}OA\right) = 3^\circ$ 2p

Problema 4

$2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$................................1p

$d = (m,n) \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{N}; (x,y)$=1a.i $n = dx; m = dy$ 2p

$d = 1 \Rightarrow x + y = 2012 \Rightarrow m + n = 2012$

$2012 = 2^2 \cdot 503 \Rightarrow n \in \{1,3,5,....,23\} \Rightarrow 12$ perechi 1p

$d = 3 \Rightarrow x + y = 670$

$670 = 2 \cdot 5 \cdot 67 \Rightarrow x \in \{1,3,7\} \Rightarrow 3$ perechi 1p

$d = 11 \Rightarrow x + y = 182$

$x = 1\left(n < 25 \Rightarrow 11x < 25\right) \Rightarrow$ 1 pereche 1p

Pentru d>13 rezulta n>25 -nu convine

Numar total de perechi: 16……………………..1p