1. a) Va rezulta $f_a(f_b(x,y)) = f_a[((-1)^b x + b, (-1)^b y)] = ((-1)^{a+b}x + (-1)^a b + +a, (-1)^{a+b}y)$. Ca să verifice partea stabilă ar trebui ca $(-1)^{(-1)^a b+a} = (-1)^{a+b}$, care se verifică luând cazurile de paritate și imparitate pentru a și b.

   Deci

   $$f_a \circ f_b = f_{(-1)^a b+a} \in F$$

   ……………………………………………………………………………………3p

   b) Se observă că operația nu este comutativă, deoarece numărul $(-1)^a b + a$ poate fi diferit de numărul $(-1)^b a + b$ (de exemplu a = 3, b=2) deci perechea $(F,\circ)$ nu poate forma grup comutativ……………………………………………………… 4p

2. Dacă f este automorfism atunci $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ (care se verifică) și f bijectivă. Deci f este surjectivă și pentru $I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ există $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $f(X) = I_2 \Leftrightarrow AX = I_2$, deci $det\ A \cdot det\ X = 1$ și $det\ A \neq 0$, adică A inversabilă.

   ……………………………………………………………………………………4p

   Dacă A este inversabilă, atunci f bijectivă (relația $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ se verifică)

   f injectivă: $AX = AY$ și prin înmulțire la stânga cu A^{-1} rezultă $X = Y$

   f surjectivă: $\forall\, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ \exists\, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AX = Y$, deci $X = A^{-1}Y$

   ……………………………………………………………………………………3p

3. Cu notația $\frac{\pi}{2} - x = \mathrm{t}$ rezultă

   $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2 t + \cos t}{\cos t + \sin t + 1}\,\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos\ t + \sin\ t - sin^2 t - \sin\ t}{\cos t + \sin t + 1}\,\mathrm{dt} =$

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{sin^2 t + \sin t}{\cos t + sin\ t + 1}\right) dt = \frac{\pi}{2} - I$$

   Deci $2I = \frac{\pi}{2}$ și $\mathrm{I} = \frac{\pi}{4}$

   ……………………………………………………………………………………7p

4. a) Fie $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

   Conform ipotezei $0 = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \frac{A}{4}x^4\Big|_{-a}^{a} + \frac{B}{3}x^3\Big|_{-a}^{a} + \frac{C}{2}x^2\Big|_{-a}^{a} + Dx\Big|_{-a}^{a} =$

   $= \frac{2}{3}Ba^3 + 2Da$ de unde $Ba^2 + 3D = 0$

   Expresia $E = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = A\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3\right] +$

   $+ B\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\right] + C\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\right] + 3D = Ba^2 + 3D = 0$

   ……………………………………………………………………………………4p

   b) Funcția f este continuă și are deci proprietatea lui Darboux; dacă ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții pe intervalul $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right]$ atunci $f(x) > 0$ pe acest interval sau $f(x) < 0$ *pe acest interval* deci $E > 0$ *pe intervalul dat* sau $E < 0$ pe intervalul dat,

fapt care contrazice rezultatul obținut la punctul a). Prin urmare ecuația are cel puțin o soluție în intervalul menționat.
…………………………………………………………………………………3p