



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

21 februarie 2016

Clasa a X-a

1. a) Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție strict concavă. Să se arate că nu există patru puncte pe graficul funcției f care să formeze un paralelogram.

b) Să se arate că:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^3 \leq \frac{\lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3}{\lambda_1 + \lambda_2}, \forall x_1, x_2 \in [0, \infty), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty).$$

Generalizați inegalitatea.

2. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și numerele $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1 \text{ și } z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0.$$

a) Arătați că: $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n, \forall z$ număr complex.

b) Demonstrați că:

$$|z - z_1| + |z - z_2| + \dots + |z - z_n| \leq n\sqrt{2}, \text{ pentru orice } z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1.$$

3. Fie A și B imaginile soluțiilor ecuației: $z^2 - 13z + 72 + 30i = 0$.

a) Să se calculeze aria triunghiului AOB , unde O este originea planului complex.

b) Cât la sută din suprafața triunghiului AOB acoperă mulțimea soluțiilor inecuației $|z| \leq 4$?

4.a) Să se rezolve ecuația: $3^x = 2^x + 1$.

b) Să se rezolve în $(1, \infty)$ ecuația:

$$x^{\log_3 2} + 1 = (x - 1)^{\log_2 3}.$$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii;

Timp de lucru: 3 ore.