Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

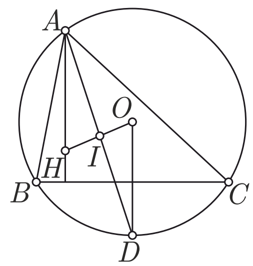
CLASA a IX-a

Problema 1. Arătaţi că dacă într-un triunghi ortocentrul H, centrul de greutate G şi centrul I al cercului înscris sunt coliniare, atunci triunghiul este isoscel.

Soluţie. Dacă triunghiul este echilateral, concluzia este verificată.

Dacă triunghiul este dreptunghic, atunci o bisectoare este şi mediană, deci concluzia este valabilă.

În caz contrar, deoarece G, H şi centrul O al cercului circumscris triunghiului sunt coliniare, deducem că I este pe OH **3p**



Bisectoarea din A trece prin mijlocul D al arcului $\overset{\frown}{BC}$ din cercul circumscris triunghiului, care nu-l conţine pe A. Dacă triunghiul nu este isoscel, O, I şi H sunt distincte, iar $OD \parallel AH$ implică $\frac{AH}{OD} = \frac{HI}{OI}$, de unde $AH = \frac{HI}{OI}R$, unde R este raza cercului circumscris. În mod analog deducem $BH = \frac{HI}{OI}R$, $CH = \frac{HI}{OI}R$, deci H coincide cu O, ceea ce contrazice ipoteza din acest caz **4p**

Problema 2. Demonstraţi că, dacă $a, b, c \geq 0$ şi $a + b + c = 3$, atunci

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} \geq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}.$$

Soluţie. Eliminând numitorii obţinem inegalitatea echivalentă $a^2c + b^2a + c^2b + \sum a^2 + \sum ab + \sum a \geq 3 + 2\sum a + \sum ab$, adică $a^2c + b^2a + c^2b + \sum a^2 \geq 6$ **2p**

Avem $a^2c \geq 2ac - c$ şi analoagele **3p**

Este deci suficient să arătăm că $\sum a^2 + 2\sum ab - \sum a \geq 6$, adică $(\sum a)^2 - \sum a \geq 6$, ceea ce reiese imediat din ipoteză **2p**

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii de gradul 2 cu proprietatea: pentru orice număr real r, dacă $f(r)$ este număr întreg, atunci şi $g(r)$ este număr întreg.

Demonstraţi că există două numere întregi m şi n astfel încât $g(x) = mf(x) + n$, oricare ar fi numărul real x.

Soluţie. Înlocuind, eventual, f cu $-f$, putem presupune $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, cu $a > 0$. Pentru t întreg, $t \geq \min f$, fie r'_t, r''_t soluţiile ecuaţiei $f(x) = t$. Atunci $g(r'_t) = \frac{\alpha}{a}(t - br'_t - c) + \beta r'_t + \gamma = mt + pr'_t + n$, unde $m = \frac{\alpha}{a}$, $p = \beta - \frac{\alpha b}{a}$, $n = \gamma - \frac{\alpha c}{a}$; analog pentru $g(r''_t)$ **1p**

Numărul $h(t) = |g(r'_t) - g(r''_t)| = |p||r'_t - r''_t| = \frac{|p|}{a}\sqrt{b^2 - 4ac + 4at}$ este întreg pentru orice $t \geq \min f$ şi avem

$$h(t+1) - h(t) = \frac{4|p|}{\sqrt{b^2 - 4ac + 4at} + \sqrt{b^2 - 4ac + 4a(t+1)}}.$$

Dacă $p \neq 0$, pentru t ales astfel încât $b^2 - 4ac + 4at > 4p^2$ obţinem $0 < h(t+1) - h(t) < 1$ şi $h(t+1) - h(t) \in \mathbb{Z}$ – fals. Rezultă $p = 0$, adică $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}$ **3p**

Obţinem astfel $g(r'_t) = mt + n$ pentru orice t întreg, $t \geq \min f$, deci $g(r'_{t+1}) - g(r'_t) = m$ este întreg, adică $\alpha = ma$, cu m întreg **2p**

În sfârşit $\gamma = n + cm$, cu n întreg, deci $g(x) = max^2 + mbx + cm + n = mf(x) + n$, cu m, n numere întregi **1p**

Problema 4. Considerăm un număr natural nenul n, un cerc de lungime $6n$ şi $3n$ puncte care împart cercul în $3n$ arce mici, astfel încât n dintre aceste arce au lungimea 1, alte n dintre aceste arce au lungimea 2, iar cele n arce rămase au lungimea 3.

Arătaţi că printre punctele considerate există două care sunt diametral opuse.

Soluţie. Punctele considerate sunt o parte dintre vârfurile unui poligon cu $6n$ laturi, înscris în cercul dat.

Presupunem contrariul. Atunci capetele fiecărui arc de lungime 1 au ca puncte diametral opuse două puncte situate în interiorul unui arc de lungime 3. Astfel, fiecărui arc de lungime 1 i se asociază un arc ,,diametral opus" de lungime 3 .... **2p**

Fixăm un arc de lungime 1 şi arcul ,,diametral opus" de lungime 3. Capetele lor determină două arce mici $\widehat{AB}$ şi $\widehat{CD}$ de lungimi $\frac{1}{2}(6n - 4) = 3n - 2$. Fie p şi q numărul arcelor de lungime 1, respectiv 3, conţinute de $\widehat{AB}$. Atunci $\widehat{CD}$ conţine p arce de lungime 3 şi q arce de lungime 1. Fie r numărul arcelor de lungime 2 conţinute de $\widehat{AB}$. Deoarece $\widehat{AB} + \widehat{CD}$ au împreună $n - 1$ arce de lungime 1 şi $n - 1$ arce de lungime 3, obţinem $p + q = n - 1$, de unde $3n - 2 = \widehat{AB} = p + 3q + 2r = n - 1 + 2(q + r)$, cea ce conduce la $2n - 11 = 2(q + r)$ – imposibil **5p**