



## Olimpiada de matematică

etapa locală

16.02.2014

### Clasa a XI-a

1. Fie  $A, B \in M_n(C)$ . Să se arate că egalitatea  $AB - BA = I_n$  este imposibilă.

Muntean Doina, Satu Mare

**Barem:**

|     |                                                           |
|-----|-----------------------------------------------------------|
| 1 p | Presupunem prin absurd că $AB - BA = I_n \Rightarrow$     |
| 1 p | $Tr (AB - BA) = Tr (I_n) \quad (1)$                       |
| 2 p | Dar $Tr (A + B) = Tr (A) + Tr (B)$ și $Tr (AB) = Tr (BA)$ |
| 1 p | Atunci în egalitatea (1): $Tr (AB) - Tr (BA) = 0$         |
| 1 p | Cum $Tr (I_n) = n \Rightarrow$ contradicție               |
| 1 p | $\Rightarrow$ egalitatea $AB - BA = I_n$ este imposibilă. |
| 7 p | <b>TOTAL</b>                                              |



2. a) Fie  $A \in M_2(C)$ . Arătați că  $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA)x + \det A$ , pentru orice  $x \in C$ .

b) Dacă  $A \in M_2(C)$  cu  $TrA = 2$  și  $\det A = 3$  demonstrați că:

$$\det(A^2 + I_2) + \det(A^2 + 3I_2) = 20.$$

Traian Tămîian, Carei

**Barem:**

|     |                                                                                                                                                                                          |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 p | a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(C)$ . Avem $\det(A - xI_2) =$<br>$\begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc =$          |
| 1 p | $= x^2 - (TrA)x + \det A$                                                                                                                                                                |
| 1 p | b) Fie $f_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - (TrA)x + \det A = x^2 - 2x + 3$ polinomul caracteristic al matricei A.                                                                           |
| 1 p | Din teorema Hamilton-Cayley rezultă: $A^2 - 2A + 3I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 + 3I_2 = 2A$ (1)                                                                                         |
| 1 p | Din (1) rezultă $\det(A^2 + 3I_2) = \det(2A) = 2^2 \cdot \det A = 4 \cdot 3 = 12$ .                                                                                                      |
|     | Am arătat că $\det(A^2 + 3I_2) = 12$ (2)                                                                                                                                                 |
| 1 p | Tot din (1) obținem: $A^2 + I_2 = 2(A - I_2)$ de unde rezultă<br>$\det(A^2 + I_2) = 2^2 \cdot \det(A - I_2) = 2^2 \cdot f_A(1)$ și cum $f_A(1) = 2$ obținem<br>$\det(A^2 + I_2) = 8$ (3) |
| 1 p | Din (2) și (3) obținem: $\det(A^2 + I_2) + \det(A^2 + 3I_2) = 12 + 8 = 20$ .                                                                                                             |
| 7 p | <b>TOTAL</b>                                                                                                                                                                             |

3. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir definit prin:  $a_1 = \sqrt{2013}$  și  $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2013}{2014}$ ,  $\forall n \in N^*$ .

a) Arătați că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este monoton și  $1 \leq a_n \leq 2013$ ,  $\forall n \in N^*$ .

b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)$

Traian Tămăian, Carei

**Barem:**

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1p  | a) Dacă notăm $2013 = k$ atunci $a_1 = \sqrt{k}$ și $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + k}{1 + k}$ , $\forall n \in N^*$ .<br>Rezultă $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 - (1+k)a_n + k}{1+k} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)(a_n - k)}{1+k}$                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 1p  | Vom demonstra prin inducție matematică propoziția: $P(n): 1 \leq a_n \leq k$ , $\forall n \in N^*$ (2)<br>Cum $P(1)$ este adevărată, presupunând $P(n)$ adevărată avem:<br>$1 = \frac{1+k}{1+k} \leq \frac{a_n^2 + k}{1+k} \leq \frac{k^2 + k}{1+k} = \frac{k(k+1)}{1+k} = k$ , de unde rezultă $1 \leq a_{n+1} \leq k$ , $\forall n \in N^*$ . Deci<br>$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ , $\forall n \in N^*$ și conform metodei inducției matematice rezultă că $P(n)$ este adevărată $\forall n \in N^*$ , |
| 1p  | Din (1) și (2) obținem $a_{n+1} - a_n \leq 0$ , $\forall n \in N^*$ și rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este descrescător și deci este și monoton. Din (2) rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit. Conform teoremei lui Weierstrass rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda \in [1, k]$ .                                                                                                                          |
| 1p  | Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lambda$ și trecând la limită în relația din enunț obținem: $\lambda = \frac{\lambda^2 + k}{1+k} \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - k) = 0$ , de unde rezultă $\lambda \in \{1, k\}$ . Cum $(a_n)_{n \geq 1}$ este descrescător și $\lambda \in \{1, k\}$ . rezultă că $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .                                                                                                                            |
| 1p  | b) Fie $L = \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)$ . Aplicând teorema Cesaro-Stolz și folosind (1) rezultă<br>$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_n - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)}{a_n - a_{n+1}} =$                                                                                                           |
| 1p  | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)}{(a_n - 1)(a_n - k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1} - 1)(1+k)}{k - a_n} = \frac{(1-1)(1+k)}{k-1} = 0.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 7 p | <b>TOTAL</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |



4. a) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{n+1} \right).$

b) Să se calculeze:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + \ln^4(1+\sqrt{x}) - \sqrt[2014]{1+\sin^2 x}}{x^2}$

Traian Tămăian, Carei

**Barem:**

|     |                                                                                                                                                                                                                             |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 p | a) Notăm $a_n = \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{n+1} \right), a_n < \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$                                                                                    |
| 1 p | $a_n > \frac{2n+1}{n+1}$                                                                                                                                                                                                    |
| 1p  | Cele două șiruri au limita 2. Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$                                                                                                                                                   |
| 2p  | b) Limita se scrie $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right]^4 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{2014}} - 1}{x^2} =$ |
| 2 p | $= \ln e + 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{2014}} - 1}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 - \frac{1}{2014} = \frac{4027}{2014}.$                          |
| 7 p | <b>TOTAL</b>                                                                                                                                                                                                                |

Notă: Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.