

Barem clasa a X-a

$$1. 2 \log_{ac} x = \log_{bc} x + \log_{ab} x \Leftrightarrow \frac{2}{\log_x a + \log_x c} = \frac{1}{\log_x b + \log_x c} + \frac{1}{\log_x a + \log_x b} \Leftrightarrow \frac{2}{\log_x a + \log_x c} = \frac{\log_x a + 2 \log_x b + \log_x c}{(\log_x b + \log_x c)(\log_x a + \log_x b)} \dots\dots\dots 2p$$

Egalând produsele pe diagonală, după reduceri rezultă relația:

$$2(\log_x b)^2 = (\log_x a)^2 + (\log_x c)^2 \dots\dots\dots 5p$$

$$2. a) \text{ Putem considera } f \text{ de forma } f(x) = ax + b \text{ și va rezulta } a^2x + ab + b = x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ De exemplu, } a = 1 \text{ și } b = \frac{1}{2} \text{ verifică, } f(x) = x + \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2p.$$

$$b) f(f(x)) = x + 1 \Rightarrow f(f(f(x))) = f(x + 1) \quad (1)$$

$$\text{Înlocuind în relația din enunț } x \text{ cu } f(x) \text{ rezultă } f(f(f(x))) = f(x) + 1 \quad (2).$$

$$\text{Din (1) și (2) rezultă } f(x + 1) = f(x) + 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$c) g(0) = f(0) \\ g(1) = f(1) - 1$$

Din relația de la b), pentru $x = 0 \Rightarrow f(1) = f(0) + 1$, deci $f(1) - 1 = f(0)$
Deci $g(0) = g(1)$ și g nu este injectivă.....3p

$$3. \frac{1}{\sqrt{5x+12x}} + \sqrt{x+7} - \sqrt{x+2} = \frac{14}{13} \text{ sau } \frac{1}{\sqrt{5x+12x}} + \frac{5}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2}} = \frac{14}{13} \dots\dots\dots 2p$$

$x = 2$ verifică ecuația, iar funcția din membrul stâng este strict descrescătoare deci $x = 2$ este singura soluție.....5p

4. Folosind relația $|z|^2 = z \bar{z}$ inegalitatea se mai scrie :

$$(1 + \bar{u}v)(1 + u\bar{v}) \leq (1 + u\bar{u})(1 + v\bar{v}) \Leftrightarrow 1 + (u\bar{v} + \bar{u}v) + u\bar{u}v\bar{v} \leq 1 + u\bar{u} + v\bar{v} + u\bar{u}v\bar{v} \dots\dots\dots 5p$$

(toți termenii din membrul stâng sau drept sunt numere reale, fiind sume sau produse de numere complexe conjugate). Reducând, se ajunge la

$$(u - v) (\bar{v} - \bar{u}) \leq 0 \text{ sau } -(u - v) (\bar{u} - \bar{v}) = - (u - v) \cdot \overline{(u - v)} =$$
$$= -|u - v|^2 \leq 0 \dots\dots\dots 2p$$

Observație. Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează cu punctajul maxim acordat.