



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2019

Clasa a XII-a

SUBIECTUL 1

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că funcția $f: G \rightarrow G$, $f(x) = x^2$ este injectivă dacă și numai dacă n este impar.

* * *

SUBIECTUL 2

a) Se consideră un grup G și două subgrupuri H și K ale lui G astfel încât $G = H \cup K$. Arătați că $G = H$ sau $G = K$.

b) Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$ astfel încât $(H, \cdot)$ este subgrup al lui G , unde $H = G - \{a, a^2\}$.

Atunci $(G, \cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}_3, +)$.

* * *

SUBIECTUL 3

Determinați toate funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ care admit o primitivă $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că F^2 este o primitivă a funcției f^2 .

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL 4

$$\text{Calculați } I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2^x \cdot \operatorname{tg}^2 x}{1 + 2^x} + \frac{3^x \cdot \operatorname{tg}^4 x}{1 + 3^x} \right) dx.$$

* * *

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.