



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Iași
14.02.2014

REZOLVĂRI ȘI BAREME
CLASA a XI-a

Problema 1.

Să se studieze convergența șirului $(X_n)_{n \geq 1}$, dacă $x_1 = a \in \mathbb{R}$ și pentru orice $n \geq 1$,
 $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$.

Rezolvare

Cum $x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)^2 \geq 0$, (x_n) este crescător. 1p

Dacă $a \in (0, 1)$ se obține că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. 2p

Dacă $a \in \{0, 1\}$, $x_n = 1$ oricare ar fi $n \geq 1$. 2p

Dacă $a < 0$ sau $a > 1$ se obține $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. 2p

Problema 2.

Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det A = 1$. Să se arate că: $\det(A^2 + A - I_2) + \det(A^2 + I_2) = 5$.

Rezolvare

Dacă α, β sunt valorile proprii ale matricei A , atunci $\alpha\beta = 1$ 2p

$$\det(A^2 + A - I_2) = (\alpha^2 + \alpha - 1)(\beta^2 + \beta - 1)$$
2p

$$\det(A^2 + I_2) = (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)$$
1p

$$\det(A^2 + A - I_2) + \det(A^2 + I_2) = (\alpha^2 + \alpha - 1)(\beta^2 + \beta - 1) + (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = (\alpha\beta)^2 + \alpha^2\beta - \alpha^2 - \alpha\beta^2 + \alpha\beta - \alpha - \beta^2 - \beta + 1 + (\alpha\beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1 = 5.$$
2p



Problema 3.

Fie G mulțimea matricelor pătratice de ordinul 3 care au elementele egale cu -1 sau 1.

- Câte elemente are mulțimea G ?
- Determinați mulțimea $\{\det A \mid A \in G\}$.

Rezolvare

- O matrice din G are 9 elemente, fiecare dintre ele putând lua 2 valori (-1 sau 1). Mulțimea G are $2^9 = 512$ elemente. 2p

- Fie $A \in G$. Din definiția unui determinant de ordinul 3 obținem că $\det(A)$ este o sumă cu 6 termeni de tipul $(\pm 1) \cdot (\pm 1) \cdot (\pm 1)$, deci $-6 \leq \det(A) \leq 6$.

Adunând linia 1 la liniile 2 și 3 obținem $\det(A) = \det(B)$ unde B este o matrice care are pe prima linie -1 sau 1, iar pe liniile a doua și a treia are 0, -2 sau 2. Scoatem factorul comun 2 de pe liniile a doua și a treia și atunci $\det(A) = 4\det(C)$, unde C este o matrice care are pe prima linie -1 sau 1, iar pe liniile a doua și a treia are 0, -1 sau 1. Cum $\det(C) \in \mathbb{Z}$ deduce că 4 divide $\det(A)$, prin urmare $\det(A) \in \{-4, 0, 4\}$. 3p

Fie $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Evident $A_1, A_2, -A_2 \in G$ și $\det(A_1) = 0, \det(A_2) = 4, \det(-A_2) = -4$. În concluzie, $\{\det(A) \mid A \in G\} = \{-4, 0, 4\}$. 2p

Problema 4.

Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+2^n} \right) = 0$.

Rezolvare

Cu inegalitatea mediilor avem:

$$0 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{n \cdot 2^n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^n}} \right). \quad 3p$$

Utilizăm teorema Stolz-Cesaro și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ și avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^n}}}{2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{2^{n+1}}}}{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^{n+1}}} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 0 \quad 3p$$

Teorema cleștelui ne asigură că limita cerută este 0. 1p

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.