

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală, județul Timiș
23.02.2018

Clasa a IX-a

1. Să se demonstreze inegalitățile:

a. $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz, (\forall) x, y, z \in \mathbf{R}.$

b. $x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z), (\forall) x, y, z \in \mathbf{R}.$

2. a. Să se calculeze suma:

$$[\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + \dots + [\sqrt{n \cdot (n + 1)}], n \in \mathbf{N}^*.$$

b. Să se rezolve ecuația:

$$[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}.$$

3. a. Arătați că $7 \cdot 25^n + 2 \cdot 6^{n+1}$ se divide cu 19 pentru orice număr natural n .

b. Arătați că $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ pentru orice număr natural nenul n .

4. Fie triunghiul ABC având dimensiunile $AB = 5$, $AC = 7$, $BC = 6$. Notăm cu **I** centrul cercului înscris triunghiului, cu **G** centrul de greutate, cu E și F punctele de intersecție ale dreptei GI cu AB și respectiv AC, și cu T punctul de intersecție dintre dreptele AI și BC. Calculați:

a. $\vec{AT}$ în funcție de $\vec{AC}$ și $\vec{BC}$;

b. $\vec{GI}$ în funcție de $\vec{GA}$ și $\vec{GB}$;

c. $\frac{AE}{EB}$ și $\frac{AF}{FB}$.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.