

Barem – Clasa a VIII-a

Subiectul I

Se dă expresia $E(x) = \frac{28x-7x^2}{x^2-2} \cdot \left[\frac{1}{x} - \left(x + 4 - \frac{3x+4}{x-2} \right) : \left(\frac{7x+9}{x+1} + x - 3 \right) \cdot \frac{x-2}{x-4} \right]$.

- Găsiți valorile lui x pentru care $E(x)$ este bine-definită și efectuați calculele pentru a obține forma cea mai simplă a expresiei.
- Rezolvați ecuația $\frac{1}{3}(E(x) - 4) = E(4)$.
- Determinați valorile naturale ale lui x pentru care $E(x)$ este număr întreg.

Rezolvare:

a) Găsirea lui $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -\sqrt{2}, -1, 0, \sqrt{2}, 2, 4\}$ punând condiția ca numitorii să fie diferiți de 0.....(1p)

Aducerea la forma $E(x) = -\frac{28x-7x^2}{x(x+2)} = \frac{7x-28}{x+2}$(2p)

b) $\frac{1}{3}(E(x) - 4) = E(4) \Leftrightarrow \frac{x-12}{x+2} = 0 \Rightarrow x = 12$(1p)

c) $E(x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x+2)|(7x-28)$(1p)

Avem însă și că $(x+2)|(x+2) \Rightarrow (x+2)|(7x+14)$, de unde va rezulta că $(x+2)|(7x-28-7x-14) \Leftrightarrow (x+2)|(-42)$(1p)

De aici urmează

$$(x+2) \in D_{-42} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42\} \Rightarrow x \in D_{-42} - 2 =$$

$\{-1, -3, 0, -4, 1, -5, 2, -6, 4, -8, 5, -9, 12, -16, 19, -23, 40, -44\}$. Excluzând acum valorile negative și pe cele găsite la punctul a) care nu permit definirea lui $E(x)$ rămânem cu $x \in \{1, 5, 12, 19, 40\}$(1p)

Subiectul II

Demonstrați că $\sqrt{a-5} + \sqrt{b-5} \leq 2$, pentru orice numere reale $a, b > 5$, cu $a+b=12$. Când are loc egalitatea?

Gazeta Matematică

Rezolvare:

Prin ridicare la pătrat obținem inegalitatea echivalentă: $\underbrace{(a-5) + (b-5)}_{=2} + 2\sqrt{(a-5) \cdot (b-5)} \leq 4 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(a-5) \cdot (b-5)} \leq 1 \text{.....(3p)}$$

Din inegalitatea mediilor avem că: $\sqrt{(a-5) \cdot (b-5)} \leq \frac{1}{2} \cdot (a-5+b-5) = \frac{1}{2} \cdot (12-10) = \frac{2}{2} = 1$(3p)

Egalitatea are loc atunci când: $a-5 = b-5 \Rightarrow a = b$. Din $a+b=12 \Rightarrow a=b=6 > 5$(1p)

Subiectul III

În cubul $ABCD A' B' C' D'$ notăm cu M, N, P mijloacele muchiilor $[AB], [B' C']$ respectiv $[DD']$, și fie $\{O\} = AC' \cap BD'$ (centrul cubului).

- Demonstrați că $CMNP$ este o piramidă triunghiulară regulată.
- Arătați că punctele M, N, P, O sunt coplanare.
- Găsiți $\text{tg}(\sphericalangle(MNP); (ABC))$.

Rezolvare:

a) Din Teorema lui Pitagora aplicată succesiv găsim că: $CN = CM = CP = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ (1p)

În același mod: $MN = NP = PM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ (1p)

Deci $CMNP$ este piramidă triunghiulară regulată.

b) Se arată că O este centrul cercului circumscris ΔMNP astfel: Mai întâi, din Teorema lui Pitagora:

$$OM = ON = OP = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{(1p)}$$

Apoi, raza cercului circumscris ΔMNP (echilateral) este $\frac{2}{3}$ din înălțimea triunghiului: $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Din unicitatea centrului circumscris deducem că O este centrul triunghiului echilateral ΔMNP (1p)

c) Fie Q mijlocul muchiei $[AD]$. Se deduce ușor că punctele N, O, Q sunt coliniare. Astfel $(MNP) \cap (ABC) = QM$ (1p)

Notăm cu O' centrul pătratului $ABCD$ și cu O'' mijlocul lui $[QM]$. Atunci, din teorema celor 3 perpendiculare, vom obține că: $m(\sphericalangle(MNP), (ABC)) = m(\sphericalangle OO'' O')$ (1p)

Atunci: $\text{tg}(\sphericalangle OO'' O') = OO' / O' O'' = \sqrt{2}$ (1p)

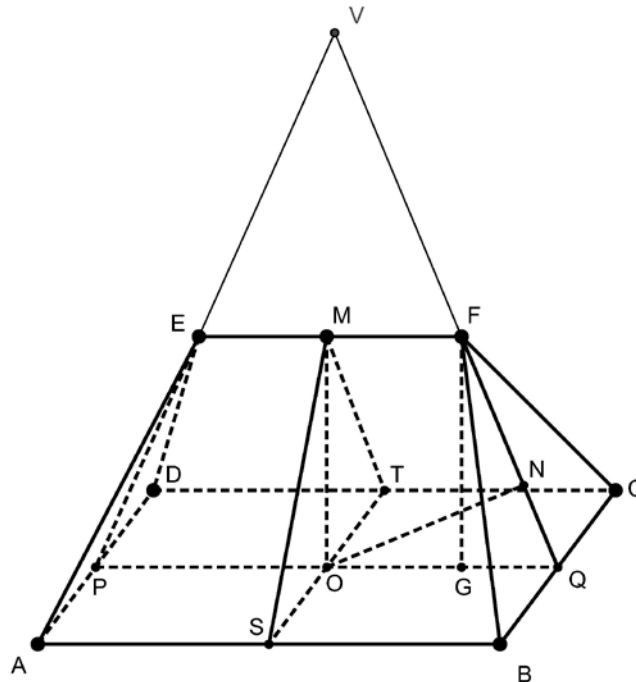
Subiectul IV

Se consideră pătratul $ABCD$ de latură $AB = 8$ metri. Fie $\{O\} = AC \cap BD$, $MO \perp (ABC)$, $MO = 3$ metri. Se consideră apoi un segment $[EF]$ cu mijlocul în M și $EF \parallel AB$. Notăm $EF = x \in [0; 8]$.

- Calculați $\sin(\sphericalangle(AEF); (DEF))$.
- Arătați că $A_{ABEF} \geq A_{FBC}$, indiferent de valoarea lui $x \in [0; 8]$. Când are loc egalitatea?
- Aflați $\text{dist}(O; (FBC))$.
- Știind că $\text{dist}(A; (FBC)) = 4\sqrt{2}$, demonstrați că $(EAD) \perp (FBC)$.

Rezolvare:

a) Fie P, Q, S, T mijloacele laturilor $[AD], [BC], [AB], [CD]$. Cum $MO \perp (ABC)$ și $OS \perp AB$, din teorema celor 3 perpendiculare obținem că $MS \perp AB$. Analog $MT \perp CD$. Deoarece $EF \parallel AB \parallel CD$, deducem că:



$$\begin{cases} MS \perp EF, MS \subset (AEF) \\ MT \perp EF, MT \subset (DEF) \Rightarrow m(\angle(AEF); (DEF)) = m(\angle SMT) \\ (AEF) \cap (DEF) = EF \end{cases} \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{În } \Delta MST \text{ avem: } \begin{cases} ST = BC = 8; MO = 3 \Rightarrow A_{MST} = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12 \text{ m}^2 \\ MS = \sqrt{MO^2 + OS^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m} = MN \Rightarrow \sin \angle SMT = \frac{24}{25} \\ A_{MST} = \frac{1}{2} \cdot MS \cdot MT \cdot \sin \angle SMT = \frac{25}{2} \cdot \sin \angle SMT \end{cases} \dots\dots\dots (1p)$$

b) Fie G proiecția punctului F pe OQ . Din $EF \parallel AB \parallel PQ$ aflăm că punctele E, F, P, Q sunt coplanare. Știind că $MO \perp OQ$ și $FG \perp OQ$, iar MO și FG sunt drepte coplanare, concluzionăm că $MO \parallel FG \Rightarrow FG \perp (ABC)$. Din teorema celor 3 perpendiculare vom avea că $FQ \perp BC$(0,5p)

Atunci, în trapezul dreptunghic $MFQO$ avem că: $FG = MO = 3$ m, iar $GQ = OQ - OG = OQ - MF = 4 - \frac{x}{2}$. Din

$$\text{Teorema lui Pitagora găsim: } FQ = \sqrt{FG^2 + GQ^2} = \sqrt{9 + \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2} \leq \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 = MS \dots\dots\dots (0,5p)$$

Egalitatea are loc când $x = 0$. Astfel vom avea că:

$$A_{ABEF} = \frac{MS \cdot (EF + AB)}{2} \geq \frac{MS \cdot AB}{2} \geq \frac{FQ \cdot BC}{2} = A_{FBC}$$

.....(1p)

c) Notăm cu N proiecția punctului O pe dreapta FQ . Din reciproca a doua a teoremei celor 3 perpendiculare (ținând seama că $FQ \perp BC, OQ \perp BC$ și $ON \perp FQ$) obținem că $ON \perp (FBC)$(1p)

$$\text{Acum: } \begin{cases} A_{FOQ} = \frac{1}{2} \cdot ON \cdot FQ = \frac{1}{2} \cdot ON \cdot \sqrt{9 + \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2} \\ A_{FOQ} = \frac{1}{2} \cdot FG \cdot OQ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ m}^2 \end{cases} \Rightarrow ON = \frac{12}{\sqrt{9 + \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2}} \dots\dots\dots (1p)$$

d) Cum $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (FBC) \Rightarrow dist(A; (FBC)) = dist(P; (FBC)) = 2dist(O; (FBC)) = 2ON = \frac{24}{\sqrt{9 + \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2}} =$

$4\sqrt{2} \Rightarrow x = 2 \dots\dots\dots \mathbf{(0,5p)}$

Fie $PE \cap QF = \{V\}$ și $(EAD) \cap (FBC) = d$. Din Teorema Acoperișului: $d \parallel AD \parallel BC$. Având $FQ \perp BC$ și $EP \perp AD$ tragem concluzia că $FQ, EP \perp d$. Dar: $d \cap EP \cap FQ = \{V\}$. Aceasta înseamnă că $m(\sphericalangle(EAD); (FBC)) =$

$m(\sphericalangle PVQ)$. Văzând că $\sin \sphericalangle NQO = \frac{ON}{OQ} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle VQP) = 45^\circ$. Analog $m(\sphericalangle VPQ) = 45^\circ$, de unde conchidem că $m(\sphericalangle PVQ) = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow (EAD) \perp (FBC) \dots\dots\dots \mathbf{(0,5p)}$